

数量化による地位指数の推定法

西 沢 正 久⁽¹⁾
真 下 育 久⁽²⁾
川 端 幸 蔵⁽³⁾

目 次

ま え が き	1
1. 調査方法と地位指数曲線の作製	2
1-1. 資料の収集	3
1-2. 調査ポイントの分類	3
1-3. 地位指数曲線の決定	6
2. 数量化の方法	18
2-1. 数量化の理論の基礎概念	18
2-2. 数量化の理論	20
3. 和田国有林の調査資料での解析結果	25
3-1. 項目とカテゴリーの分類	25
3-2. 調査結果の分類表	27
3-3. 計算と結果表	36
3-4. 結果の解釈	37
4. 考 察	47
文 献	48
Résumé	49

ま え が き

林地のある樹種に対する材積生産能力は、その林地の環境因子と、その樹種の生理的な機能との有機的な結合によってきまると考えられる。林木および林分の成長は植栽本数や除伐、間伐などの施業条件をはじめ、土壌、地勢、気象などの自然的環境条件や山火、病虫害のような偶然的な原因に支配されるが、このうち施業条件はわれわれがコントロールできる部分であるが、自然環境や偶然的要因は全くわれわれの管理の外におかれる。このような条件の総合結果としての林地の生産能力は地位によって表わされ、その指標としては材積、直径、樹高、平均成長量などいろいろ提案されている。この中で、林分の密度によって影響されることが最も少ないと考えられる樹高が、地位の指標として用いられることが多い。

わが国の収穫表では主林木の平均樹高を林齢の函数として表わし、これをいくつかの階級にわけて地位区分をする相対的な樹高地位が用いられているし、米国や英国では一定の基準年齢（多くは50年）における主林木の平均樹高を地位指数として、10フィート区分で地位を区分する絶対的な樹高地位を用いている。

この地位を自然環境条件から決定することが極めて重要であることは昔から異論のないところであり、

(1) 経営部経済科測定研究室主任研究官・農学博士

(2) 土壌調査部土壌調査科土壌調査研究室長・農学博士 (3) 経営部経済科測定研究室

またいろいろ試みられてきたが、これを数値的に表わすことが困難であることと、ひとつの調査地のなかでも土壌の差異が著しいという例もあって、その研究はなかなか進展しなかったのが現状である。

近代統計学の発展と電子計算機の開発は、この問題に対してひとつの解決策をもたらした。九州のスギの土壌調査の資料を用いてこの解決に対してのひとつの試みが行なわれた⁹⁾が、われわれはこれから提起された問題点を整理して、昭和37年度カラマツ造林地の実態調査の一部としてこの研究に着手し、一応の成果を得たのでこれを発表したい。

この研究にあたってカラマツ総合調査の主任指導者である造林部長 加藤善忠技官、造林研究室長 蜂屋欣二技官には調査の実行と取りまとめ等に関し多くの便宜を与えていただき、現地調査には造林研究室 安藤 貴技官、土壌研究室 脇 孝介技官、木曾分場 長谷川敬一技官および上田営林署の関係担当官のご援助をいただいた。また調査資料の整理および計算には測定研究室 神戸喜久技官の労に負うところが多い。記して厚く謝意を表する。

1. 調査方法と地位指数曲線の作成

ひとつの土壌試孔でのいろいろな土壌条件およびその付近の環境因子を地位やいろいろな林分因子と結びつけるために調査されるプロットの大きさは、いままで経験的に 0.01ha や 0.04ha のものが多く用いられていた。われわれはこのような場合の林分調査をする広がり、ポイントサンプリングの広がりが妥当であると考えた。すなわち、ひとつの土壌試孔での土壌条件は大きな林木であれば遠くにあってもその

Table 1. ブロック別、林小班、年齢別カラマツ面積一覧表
Area of Larix stand for age class, sub compartment, compartment and block.

プロック Block	Age class 林班 林齡	21~25	26~30	31~35	36~40	41~45	46~50	51~	計
	Compar- tment								
B 和 田 峠	133Ⅱ	2.96(ち) 2.78(ぬ)	2.23(た)				1.61(り) 54.47(よ) 8.14(れ)		72.19
	135						22.48(ほ)		22.48
	136				0.19(い) 6.88(ろ)		105.91(は) 2.88(は) 13.12(に) 30.53(ほ) 1.77(ほ)		161.28
	137	1.62(を)	2.94(よ) 7.42(そ)			35.19(つ) 1.92(ぬ) 17.96(む)		0.89(ろ)	67.94
	小計 Sub total		5.74	3.85	10.36	7.07	55.07	240.91	0.89
A 扉 峠	139				5.42(ろ) 21.53(に)	4.75(と)			31.70
	140			14.34(ひ) 0.99(に)	6.36(ろ)	11.03(ち) 11.83(わ)			44.55
	141			2.50(ろ)	8.41(り)	4.15(い) 9.33(に) 75.76(と)			100.15
	142				98.75(は)				98.75
	小計 Sub total			17.83	140.47	116.85			275.15
総計 Total		5.74	3.85	28.19	147.54	171.92	240.91	0.89	599.04

成長に関与する率が高く、小さな木であればその成長に関与する率が少ないであろう。BITTERLICH のポイントサンプリングにより胸高直径がある一定スリット幅からはみだす林木を選ぶことは、この条件を自然に満足させていることになる。このポイントサンプリングによる調査資料をもとにして分析した結果、地位指数と土壤条件や環境因子の重相関係数が 0.96 にもなったことから、この調査法の有用さが実証された。

また、推定または予測される外的基準である地位を土壤条件や環境因子と結びつけるためには、収穫表で用いられている相対的な地位よりは 40 年での樹高をもとにして 2 m 区分で表わした絶対的な地位指数が妥当であると考え、同時に地位指数曲線も作製した。これは収穫表の地位区分を行なう方法と同様な方法で作製することができるが、対象地域にはすべての齢級にわたる林分がなかったので、調査ポイントで選ばれた林木の樹幹解析によりその過去の成長過程の資料を用いて作製した。

われわれが調査した林分は、長野営林局、上田営林署管内、上田事業区の 133Ⅱ - 144 林班にまたがる約 600ha のカラマツ人工林である。

1-1. 資料の収集

対象林分の齢級別面積表を Table 1 に示す。

この対象地域に対してまずポイントサンプリングの方法で林分調査を行ない、かつそのポイントで土壤試孔を掘り、土壤断面の調査とその付近の環境調査を実行した。さらに、約半数のポイントでは、地位指数曲線を作製するために標本木の樹幹解析を行なった。

調査の行なわれたポイント数は、調査の費用と工程からブロックごと、齢級ごとにその面積に応じて調査する林小班を抽出し、小班で調査するポイント数を比例割当てで決定した。小班でのポイントの位置は、林分状態の変化と土壤状態の変化の両方を勘案して選定した。このためには、できるだけ小班内で谷から峯にかけてポイントを配列するようにした。選ばれた調査点は扉峠地区で 47 点、和田峠地区で 45 点、合計 92 点であった。

各ポイントではポイントサンプリングの方法を適用して断面積数 4 のスリット幅からはみだす林木に対しては胸高直径を輪尺で 2 mm 括約で測定し、樹高はブルーメライス測高器で 10 cm 括約で測定した。樹高測定の際に上層木、下層木の判定を行ない、約半数のポイントで各ポイント 1 本ずつ樹幹解析をした。

1-2. 調査ポイントの分類

各ポイントでの断面積数 4 のスリット幅からはみだした本数を n 、胸高直径 D_i なる林木の胸高断面積を $g_i \left(= \frac{\pi}{4} D_i^2 \right)$ 、樹高を H_i 、ha あたり本数を N_i 、胸高直径 D_i 、樹高 H_i なる林木の材積表材積を v_i 、胸高係数 F_i 、形状高を $H_i F_i$ とするとき、各林分因子はそれぞれつぎのようにして求められる。

- a) ha あたりの胸高断面積 (B)

$$B = 4n, \text{ m}^2/\text{ha}$$

- b) ha あたり本数 (N)

$$N = \left(\frac{100}{k} \right)^2 \sum_{i=1}^a \frac{1}{g_i} = \sum_{i=1}^n N_i$$

- c) 平均樹高 (\bar{H})

$$\bar{H} = \frac{\sum_{i=1}^n N_i H_i}{N}, \text{ m}$$

Table 2. 調査結果一覽表
Results of sampling points.

ブロック別	No	林小班 Compartment and subcom- partment	林 齡 Age (年)	平均樹高 Mean height (m)	ha 当 り断面 積 Basal area par ha (m ²)	ha 当 たり本 数 Tree number per ha (本)	ha 当 たり材 積 Volume per ha (m ³)	土 壤 型 Soil type	標準地 適否 Suit- able or not for sample plots	地位 指数 Site index
A	①	139と1	44	16.8	28	594	232.6	B/D 匍行土	×	16
	②	" 2	"	12.6	32	1298	223.3	B/D(d)	○	12
	③	140ろ1	39	25.9	24	340	312.0	B/D	○	26
	④	" 2	"	23.7	28	409	328.5	B/E	○	24
	⑤	" 3	"	25.6	28	452	358.6	B/D	×	26
	⑥	" 1'	"	19.1	40	1149	378.5	B/D(d)	○	20
	7	" 2'	"	20.9	24	655	249.9	B/D	×	22
	8	" 3'	"	25.2	40	842	502.4	B/D 匍行土	×	26
	9	" 4'	"	23.7	28	400	326.7	B/D E 崩積土	×	24
	⑩	140ち1	44	16.6	32	930	268.5	B/D 匍行土	○	16
	⑪	" 2	"	13.5	24	853	160.6	B/B	○	12
	12	140わ1	"	17.6	32	820	284.1	B/D	○	16
	13	" 2	"	18.0	32	838	274.9	B/D	×	16
	14	141い1	45	23.2	24	320	271.4	B/D(d)	×	22
	⑮	141ろ1	38	26.8	32	408	420.4	B/E	○	28
	⑯	141に1	45	22.9	24	447	275.1	B/D 崩積土	×	22
	⑰	" 2	"	26.2	24	345	313.5	B/E	○	24
	⑱	141と1	"	21.8	28	481	308.3	B/E	○	20
	19	" 2	"	14.6	24	1181	176.4	B/D(d)	○	14
	20	" 3	"	22.0	28	457	305.2	B/E	○	20
	扉	⑳	" 4	"	15.6	40	1385	306.8	B/D	○
㉑		" 5	"	26.4	32	504	427.2	B/E 崩積土	×	24
㉒		" 6	"	20.5	48	1645	442.3	B/D 崩積土	○	18
24		" 7	"	23.2	32	535	373.6	B/E	○	22
㉔		" 8	"	21.2	28	585	298.6	B/D 崩積土	○	20
㉕		" 9	"	19.1	36	865	351.3	B/D E	○	18
㉖		" 10	"	15.5	36	1567	272.7	B/D(d)	○	14
28		" 11	"	18.6	32	685	292.8	B/D	×	18
㉘		" 12	"	19.4	32	742	316.3	B/D 崩積土	○	18
30		" 13	"	21.1	24	344	246.1	B/D 崩積石礫土	×	20
㉚		" 14	"	17.2	32	1178	257.5	B/D(d)~(Er)	○	16
峠	㉛	" 15	"	14.1	32	1115	226.4	B/B	×	14
	㉜	" 16	"	20.6	24	579	251.3	B/D 崩積土	○	20
	㉝	" 18	"	17.7	32	715	283.5	B/D(d)	○	16
	㉞	141り1	43	18.3	28	585	256.0	B/D 匍行土	×	18
	36	142は1	"	24.2	28	424	338.3	B/E	×	24
	㉟	" 2	"	23.9	32	616	386.7	B/D 崩積土	○	22
	38	" 3	"	26.1	24	272	306.4	B/D E 崩積土	○	26
	39	" 4	"	17.2	36	1422	302.2	B/D(d)	○	16
	40	" 5	"	23.3	28	421	322.5	B/E	×	22
	41	" 6	"	15.9	32	1441	253.6	B/D 匍行土	○	16

ブロック別	No	林小班 Compartment and subcom- partment	林 齡 Age (年)	平均樹高 Mean height (m)	ha 当 り断面積 Basal- area par ha (m ²)	ha 当 たり本 数 Tree number per ha (本)	ha 当 たり材 積 Volume per ha (m ³)	土 壤 型 Soil type	標準地 適否 Suit- able or not for sample plots	地 位 指 数 Site index
	42	142は7	43	24.1	36	606	436.8	B/DE	×	24
	43	" 8	"	14.4	40	2513	281.3	B/d(d)	○	14
	44	" 9	"	24.1	24	355	279.4	B/DE	○	24
	④5	" 10	"	23.4	28	624	335.3	B/d 匍行土	○	22
	46	" 11	"	20.6	32	639	330.2	B/d	○	20
	47	" 12	"	18.7	44	1436	404.2	B/d 崩積土	○	18
	48	133Ⅱち1	25	7.8	20	1154	74.0	B/b	○	10
	49	133Ⅱよ1	52	7.5	16	970	52.1	B/d ms	×	6
	50	" 2	"	11.4	16	540	78.0	B/d(d)	×	10
	51	" 3	"	17.0	28	823	230.3	B/d(d)	×	14
	⑥2	" 4	"	20.6	20	482	198.2	B/d(d)	×	18
	53	" 5	"	17.1	32	1113	260.9	B/c	○	14
	⑥4	" 6	"	12.3	20	999	114.9	B/A	○	10
	55	" 7	"	14.1	32	1516	207.4	B/b	×	12
B	56	" 8	"	12.9	28	1160	169.6	B/d(d)	○	10
	57	" 9	"	19.7	24	676	202.3	B/d	×	18
	⑥8	135ほ1	49	14.9	32	1089	244.2	B/d ms	○	14
	⑥9	" 2	"	12.9	32	1640	207.6	B/d	○	12
	60	" 3	"	16.3	24	619	196.9	B/c ms	×	14
	⑥1	" 4	"	11.8	32	1121	186.2	B/d(d)	○	10
	⑥2	" 5	"	18.5	24	621	226.8	B/E ms	○	16
	63	136ろ1	41	19.8	32	792	324.3	B/d ms	×	20
和	64	" 2	"	20.3	36	847	350.0	B/d ms	×	20
	⑥5	136は1	50	24.3	28	436	322.0	B/E 匍行土	○	22
	66	" 2	"	22.4	24	383	258.8	B/E 崩石・石礫土	×	20
	67	" 3	"	21.0	20	449	204.2	B/d 崩積土	×	18
	68	" 4	"	15.5	44	1843	346.0	B/d	○	16
	69	" 5	"	25.6	20	242	237.9	B/E 崩積土	×	24
	70	" 6	"	18.8	16	389	153.4	B/d	×	16
	71	" 7	"	21.0	16	249	164.8	B/DE	○	18
田	⑦2	136に1	51	14.8	40	1522	287.5	B/d(d)	○	12
	⑦3	" 2	"	5.7	20	2279	54.0	B/c	×	4
	⑦4	" 3	"	12.9	28	1348	168.7	B/d(d)	○	12
	⑦5	" 4	"	10.9	20	1175	102.3	B/c	○	10
	76	136ほ1	"	12.9	24	934	148.1	B/d ms'	×	12
	77	" 2	"	16.2	16	398	128.8	B/DE ms'	○	14
	78	" 3	"	11.7	28	1062	159.0	B/c ms	×	10
	79	" 4	"	13.0	20	767	128.5	B/d ms	○	12
	⑧0	" 5	"	10.1	32	2510	161.0	B/d ms	○	8
峠	⑧1	" 6	"	7.6	20	1373	74.4	B/DE ms	×	6
	⑧2	137そ1	38	27.1	24	302	305.9	B/DE 崩積土	○	28
	83	" 2	"	25.5	24	317	305.5	B/DE "	○	26
	84	137つ1	48	24.7	28	441	292.9	B/d 匍行土	×	22
	85	" 2	"	17.0	28	854	225.0	B/d 残積土	×	16
	86	" 3	"	22.1	16	221	172.5	B/d 匍行土	×	20
	87	" 4	"	21.1	28	426	269.4	B/E	○	20
	88	" 5	"	14.9	28	619	193.7	B/cd	×	14
	⑧9	" 6	"	23.2	32	496	342.4	B/DE 崩積土	○	22
	90	137ね1	"	22.8	28	457	319.5	B/E	×	22
	⑨1	137を1	33	17.3	28	635	239.2	B/d	○	20
	92	" 2	"	18.1	28	712	250.9	B/E	○	20

d) ha あたり材積 (V)

$$V = \left(\frac{100}{k}\right)^2 \sum_{i=1}^n H_i F_i, \text{ m}^3/\text{ha}$$

ここに $k = 50$ である。

以上の方法で算出されたポイントの各因子を、土壌型とともに Table 2 に掲げておく。

上表の最後の欄の地位指数は、1—3Cで求めた地位指数曲線によって推定されたそのポイントの地位指数である。

この対象地域に適用される信州地方カラマツ林林分収穫表から地位および本数密度分類指針表を作成し (Table 3), これにもとづいて各ポイント进行分类すると Table 4 および5のようになった。参考のため、haあたりの材積および土壌型が括弧内にのせてある。これらによると、適潤型が成長がよく、乾燥型になるにしたがって成長が悪くなる傾向をうかがうことができる。なお、この分類はカラマツ総合調査のうちで、われわれの次に行なわれた造林部門の調査プロット選定の基礎となった。

Table 3. 地位および本数密度分類指針表
Guide table of site class and density of stem number.
平均樹高 (m) (Mean height m)

地位 Site class	特	1	2	3	4
25年	17.9 ~ 20.1	15.6 ~ 17.8	13.3 ~ 15.5	11.0 ~ 13.2	8.9 ~ 10.9
30	20.2 ~ 22.8	17.7 ~ 20.1	15.0 ~ 17.6	12.4 ~ 14.9	9.9 ~ 12.3
35	22.2 ~ 25.0	19.3 ~ 22.1	16.5 ~ 19.2	13.6 ~ 16.4	10.9 ~ 13.5
40	23.9 ~ 26.9	20.9 ~ 23.8	17.8 ~ 20.8	14.7 ~ 17.6	11.8 ~ 14.6
45	25.5 ~ 28.7	22.2 ~ 25.4	19.1 ~ 22.1	15.8 ~ 19.0	12.5 ~ 15.7
50	26.5 ~ 29.9	23.2 ~ 26.4	19.9 ~ 23.1	16.5 ~ 19.8	13.2 ~ 16.4

本数密度 (中) (収穫表本数 ± 20%)
Density of stem number (medium) (stem number of yield table ± 20%)

地位 Site class	特	1	2	3	4
25年	637 ~ 955	746 ~ 1120	889 ~ 1333	1058 ~ 1588	1225 ~ 1837
30	506 ~ 758	602 ~ 902	722 ~ 1084	867 ~ 1301	1045 ~ 1567
35	411 ~ 617	497 ~ 745	600 ~ 900	726 ~ 1088	895 ~ 1343
40	343 ~ 515	418 ~ 628	508 ~ 762	617 ~ 925	771 ~ 1157
45	290 ~ 434	358 ~ 536	438 ~ 656	535 ~ 803	671 ~ 1007
50	250 ~ 374	311 ~ 467	382 ~ 572	468 ~ 702	590 ~ 886

1—3. 地位指数曲線の決定

林地が各樹種に対して示すであろう生産力を表わす変量として、われわれは地位指数を採用した。地位指数はある基準年齢 (われわれは40年を採用した) を定め、その年齢における優勢木の樹高で表わした。これを採用した理由は、後に2で説明する数量化の理論において内部因子、すなわち、林地の環境因子や土壌条件を数量化するさいに外的基準として地位をなんらかの意味において変量として表わすことが必要なためである。また、わが国の収穫表の調製のさいに普通に行なわれている主林木の林分平均樹高に

Table 4. 本数密度および地位別ポイント分類表 (和田峠)
 Classified table of sampling point for site class and density of stem number (Block B).

注) : (()) 内の数字は標準地がとれるポイント数で Table 2 の標準地の適否の列に○印のつけてあるもの数である。
 (()) Shows point number suitable for sample plot.

密度 林齢	地位	特	1			2			3			4			計								
Dense	40年					③(324.3) B/bm	④(350.0) B/bm									2 ((0))							
	50年			⑧(342.4) B/l _{DE} 崩積				⑤(230.3) B/b(d)	⑥(260.9) Bc	②(225.0) B/b残積	④(52.1) B/bm	⑤(114.9) B/a	⑥(346.0) B/b	⑦(186.2) B/b(d)	⑧(102.3) B/c	⑨(148.1) B/bm	⑩(159.0) B/cm	⑪(161.0) B/bm	⑫(74.4) B/l _{DE} m	20 ((12))	22((12))		
Medium	35年					①(239.2) B/b	②(250.9) B/l _E														2((2))		
	50年			③(322.0) B/l _E 削行	④(292.9) B/b削行	⑤(198.2) B/b(d)	⑥(258.8) B/l _E 崩積・石礫	⑦(202.3) B/b	⑧(226.8) B/l _E m	⑨(196.9) B/cm	⑩(128.5) B/bm	⑪(193.7) B/cd									10((3))	12((5))	
Open	25年										④(74.0) B/b										1((1))		
	40年			⑧(305.9) B/l _{DE} 崩積	⑨(305.5) B/l _{DE} 崩積																	2((2))	
	50年			⑩(237.9) B/l _E 崩積		⑪(164.8) B/l _{DE}	⑫(172.5) B/b削行	⑬(204.2) B/b崩積	⑭(153.4) B/b	⑮(78.0) B/b(d)	⑯(128.8) B/l _{DE} m	⑰(269.4) B/l _E									8((3))	11((6))	
計 Total		40年 2 ((2))	50年 4 ((2))	35年 2((2)) 40年 2((0)) 50年 5((1))			9((3))	50年 7 ((2))	25年 1((1)) 35年 2((2)) 40年 4((2)) 50年 22((13))			23((14))	25年 1((1)) 35年 2((2)) 40年 4((2)) 50年 38((18))			45((23))							

数量化による地位指数の推定法 (西沢・真下・川端)

Table 5. 本数密度および地位別ポイント分類表 (扉峠)
 Classified table of sampling point for site class and density of stem number (Block A).

注: (())内の数字は標準地のとれるポイント数で Table 2 の標準地の適否の列に○印のつけてあるもの数である。
 (()) Shows point number suitable for sample plot.

密度	林齢	地位	特 1	1	2	3	4	計			
Dense	40年	⑧	(502.4) _{B_D 匍行} 26	⑦	(249.9) _{B_D} 22	⑥	(378.5) _{B_D(d)} 20			3((1))	23 ((17))
	45年	⑳	(427.2) _{B_{IE} 崩積} 24	⑳	(386.7) _{B_{IE} 崩積} 22 ㉑ (436.8) _{B_{DE}} 24 ㉒ (335.3) _{B_D 匍行} 22	㉓ (442.3) _{B_{IE} 崩積} 18 ㉔ (351.3) _{B_{DE}} 18 ㉕ (316.3) _{B_{IE} 崩積} 18	⑩ (268.5) _{B_D 匍行} 16 ⑪ (284.1) _{B_D} 16 ⑫ (274.9) _{B_{IE}} 16 ⑬ (257.5) _{B_{IE}(d)} 16 ⑭ (302.2) _{B_{IE}(d)} 16 ⑮ (253.6) _{B_D 匍行} 16 ⑯ (404.2) _{B_{IE} 崩積} 18	㉖ (306.8) _{B_{IE}} 14 ㉗ (272.7) _{B_{IE}(d)} 14 ㉘ (226.4) _{B_{IE}} 14	㉙ (281.3) _{B_D(d)} 14 ㉚ (223.3) _{B_{IE}(d)} 12 ㉛ (176.4) _{B_{IE}(d)} 14	20((16))	
Medium	40年	⑤	(358.6) _{B_E} 26 ⑬ (420.4) _{B_{IE}} 28							2 ((1))	17 ((10))
	45年	⑰	(313.5) _{B_{IE}} 24	⑱ (275.1) _{B_{IE} 崩積} 22 ㉒ (373.6) _{B_{IE}} 22 ㉓ (322.5) _{B_{IE}} 22	㉔ (338.3) _{B_{IE}} 24 ⑱ (308.3) _{B_{IE}} 20 ㉕ (251.3) _{B_{IE} 崩積} 16 ㉖ (305.2) _{B_{IE}} 20 ㉗ (330.2) _{B_{IE}} 20 ㉘ (298.6) _{B_{IE} 崩積} 20	① (232.6) _{B_{IE} 匍行} 16 ② (292.8) _{B_{IE}} 18 ③ (283.5) _{B_{IE}(d)} 16	④ (256.0) _{B_{IE} 匍行} 18	⑤ (160.6) _{B_{IE}} 12	15 ((9))		
Open	40年	③	(312.0) _{B_D} 26	④ (328.5) _{B_{IE}} 24 ⑤ (326.7) _{B_{DE} 崩積} 24						3 ((2))	7 ((4))
	45年	⑧	(306.4) _{B_{DE} 崩積} 26	⑨ (271.4) _{B_{IE}(d)} 22 ⑩ (279.4) _{B_{IE}} 24	⑪ (246.1) _{B_{IE} 崩積・石礫} 20					4 ((2))	
Total	40年		4((2))	3((1))	1((1))	0	1((1))	9((5))	7((4))	47((31))	
	45年		3((2))	9((4))	9((8))	11((7))	6((5))	38((26))	12((5))		

よる相対的なクラス分けによって表示する地位よりも、絶対的な数値で表わされる地位指数は基準年齢における樹高を任意に選ぶことによってそのクラス分けを集約にできるためである。さらに、地位指数を用いて樹種間や、林地間での比較を行なう場合、相対的地位よりも理解しやすい利点をもっているからである。

さて、次に地位指数の決定方法を述べよう。われわれは調査対象地を概査したさいに、一見して2つのブロック(扉峠地区と和田峠地区)においてカラマツの成長に明らかに差があるということが認められた。実際に両ブロックの平均材積の差を検定したところ、数値的に有意な差を示した。すなわち、必要な統計量は下表のとおりである。

	n (ポイント数)	\bar{V} (ha 当たり平均材積)	$s^2_{\bar{V}}$ (分散)	$s^2_{\bar{V}}$ (平均材積の分散)	$s_{\bar{V}}$ (標準誤差)	信頼限界
扉峠地区	47	307.5	4619.6548	98.2905	9.9	307.5±19.8(6.4%)
和田峠地区	45	207.6	6718.3357	149.2963	12.2	207.6±24.4(11.8%)

両地区の分散比

$$F = s^2_{\bar{V}_1} / s^2_{\bar{V}_2} = \frac{6718.3357}{4619.6548} = 1.45 < F_{46}^{44}(0.025) \doteq 1.87$$

には差はないが、平均材積の差の検定は、

$$s^2 = \frac{\sum (V_1 - \bar{V}_1)^2 + \sum (V_2 - \bar{V}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = 5645.67655$$

であるから

$$t = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{307.5 - 207.6}{\sqrt{5645.67655} \sqrt{\frac{1}{47} + \frac{1}{45}}} = 6.38^{**} > t_{90}(0.01) = 2.62$$

で有意の差が認められた。

このように両ブロックには明らかに成長の差があることが推察されたので、われわれは各ブロックごとに地位指数を決定することにした。本稿では扉峠ブロックについての決定方法を述べ、和田峠ブロックはその結果だけを示そう。

a) 扉峠ブロックの地位指数曲線の作製

地位指数曲線を作るには、目的とする樹種や地域の樹高成長の過程を知るために、林齢と樹高の関係を求めるデータを集めなければならない。それには、収穫表調製のさいの地位わけのためのデータを集めるのと同じ考え方が採用されよう。すなわち、収穫表の調製においてはできるだけ各年齢にわたるように多くの標準地を調査する方法と、数個のプロットを長期間にわたって観測調査する方法とがある。後者の簡略法としては若干の樹幹解析を含めた標準地調査や伐根の調査等を併用して、過去の成長過程を推定するデータを集めることも考えられよう。しかし、地位指数曲線を作るためのデータは各年齢ごとの主林木の平均樹高である。したがって、できるだけ各年齢にわたり年齢内の樹高の変動がよくあらわれるようなデータを集めねばならないが、実際には前記のような理想的なデータの収集方法は本調査では費用と工程の面から困難であると同時に、そのようなすべての年齢にわたる林分がないことから、われわれは樹幹解析による過去の推定樹高のデータを用いねばならなかった。各ポイントで樹幹解析する林木は上層木の平均樹高をもつものなかで、異常な樹形や梢頭をもつものは除外して完満な林木を選定した。

選ばれたポイント数は扉峠地区で26ポイント、和田峠地区で16ポイントである。Table 2で、ポイント番号に○印を付したのがその点である。

i) ガイドカーブの適合

このようにして集められたデータから、地位指数曲線を作製するには、樹高の平均的な成長過程を知るためのガイドカーブが必要である。われわれはこのガイドカーブに一種のロジスティク曲線を用いたら適合がよかった。用いた曲線は

$$Y_t = K - ab^t \dots\dots\dots(1)$$

である。これは修正指数曲線とよばれており、一種の成長曲線である*。

樹高成長にこの修正指数曲線を適合させるには齢階 t における樹高を Y_t とすると、 $t = 0, 1, 2, \dots$ におきかえたときの樹高の推定値が(1)式で求められるようにしなければならない。ここに K, a, b は求められねばならない定数である。

さて(1)式をみると $t = 0$ で $Y_t = 0$ という樹高成長の初期条件を満足するためには、 $a = K$ でなければならず

$$Y_t = K(1-b^t) \dots\dots\dots(1')$$

がこの条件を満足する式となる。しかし、実際に $t = 0$ というのは0~5年というひとつの区間を0とおくのであるから(1)式で $t = 0$ の場合 $Y_t = K - a$ となってこれが5年間の樹高の成長であると考えれば、(1)式を使うことに矛盾は生じない。

修正指数曲線は最初は急速に成長するが、極限に近づくにしたがってその成長速度を減ずるような現象によく適合する。(1)式において $a > 0, 0 < b < 1$, で $t \rightarrow \infty$ のとき $Y_t \rightarrow K$ であるから、 K は樹高の極限值で、ガイドカーブが作られた地域で達しうる最高の平均樹高を表わす。 $t = 0$ で $a = K - Y_t$ であるから a は $t = 0$ のときの樹高から極限值までの距離を示し、また b は単位時間の増加分の減少率である。このような生物的な意味をもつ定数 K, a, b が決められれば、 t (齢階) に応じて理論的な平均樹高 (\hat{Y}_t) が計算できる。

ii) ガイドカーブの計算

Table 6. 齢階ごとの平均樹高 Mean hight for age class.

齢階 Age class	t	本数 Stem number	平均樹高 Mean height (\hat{Y}_t)
5年	0	26	1.25
10	1	26	4.63
15	2	26	7.88
20	3	26	10.17
25	4	26	12.58
30	5	26	14.65
35	6	26	16.56
40	7	26	18.29
45	8	26	19.74

* Logistic 曲線は一般に $Y = \frac{K'}{1+ae^{bt}}$ で表わされるが、この式の両辺の逆数をとると $\frac{1}{Y} = \frac{1}{K'} + \frac{a}{K'}e^{bt} = K + AB^t$ ($B=e^b, K = \frac{1}{K'}, A = \frac{a}{K'}$ とおくと) となって(1)式と同型となる。

26本の樹幹解析のデータから計算した齡階ごとの平均樹高は Table 6 のとおりであった。

この資料を用いて (1) 式の定数 K, a, b を決めなければならない。(1) 式は線型に変形することがめんどうであるから、最小二乗法は使用しない。(1) 式の母数は K, a, b の3つであるから系列中の適当なる時点の Y_t を選んでその値を (1) 式に代入した連立方程式を作れば、これらの定数の値はきめることができるが、勝手な選択をさけるために次のような方法を用いる。すなわち、系列の項数を3の倍数 $N=3n$ に整理し(余分の項は捨てる)、系列を3等分して各部分系列の和を $\sum_1 Y, \sum_2 Y, \sum_3 Y$ として次の公式によって定数を決める(注)。

$$b^n = \frac{\sum_3 Y - \sum_2 Y}{\sum_2 Y - \sum_1 Y} \dots\dots\dots (2)$$

$$a = (\sum_1 Y - \sum_2 Y) \left[\frac{b-1}{(b^n-1)^2} \right] \dots\dots\dots (3)$$

$$K = \frac{1}{n} \left\{ \sum_1 Y + \left(\frac{b^n-1}{b-1} \right) a \right\} \dots\dots\dots (4)$$

われわれのデータでは

$$n = 3$$

$\sum_1 Y = 13.76, \sum_2 Y = 37.40, \sum_3 Y = 54.59$ であるから

$$b^3 = \frac{\sum_3 Y - \sum_2 Y}{\sum_2 Y - \sum_1 Y} = \frac{54.59 - 37.40}{37.40 - 13.76} = 0.727157^*$$

$$\therefore b = 0.899241$$

注) (2), (3), (4) 式の証明

$Y = K - ab^t$ であるから

$$\sum_1 Y = \sum_{t=0}^{n-1} Y_t = nK - (a + ab + ab^2 + \dots + ab^{n-1}) = nK - a(1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1})$$

然るに、 $1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1} = \frac{(1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1})(b-1)}{(b-1)} = \frac{b^n - 1}{b-1}$

故に、 $\sum_1 Y = nK - a \left(\frac{b^n - 1}{b-1} \right) \dots\dots\dots (i)$

同様にして $\sum_2 Y = nK - ab^n \left(\frac{b^n - 1}{b-1} \right)$

$$\sum_3 Y = nK - ab^{2n} \left(\frac{b^n - 1}{b-1} \right)$$

これから $\sum_2 Y - \sum_1 Y = -a \frac{(b^n - 1)^2}{(b-1)} \dots\dots\dots (ii)$

$$\sum_3 Y - \sum_2 Y = -ab^n \frac{(b^n - 1)^2}{(b-1)}$$

故に $b^n = \frac{\sum_3 Y - \sum_2 Y}{\sum_2 Y - \sum_1 Y} \dots\dots\dots (iii)$

(ii) より $a = (\sum_1 Y - \sum_2 Y) \frac{b-1}{(b^n - 1)^2} \dots\dots\dots (iv)$

(i) より $K = \frac{1}{2} \left\{ \sum_1 Y + \frac{b^n - 1}{b-1} a \right\} \dots\dots\dots (v)$

また (iii), (iv) 式を (v) 式へ代入すると $K = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\sum_1 Y \sum_3 Y - (\sum_2 Y)^2}{\sum_1 Y + \sum_3 Y - 2\sum_2 Y} \right\}$ 。

$$a = \left\{ \sum_1 Y - \sum_2 Y \right\} \frac{b-1}{(b^n-1)^2} = (13.76 - 37.40) \left(\frac{0.899241-1}{(0.727157-1)^2} \right) = 31.9967$$

$$K = \frac{1}{n} \left\{ \sum_1 Y + \left(\frac{b^n-1}{b-1} \right) a \right\} = \frac{1}{3} \left\{ 13.76 + \left(\frac{0.727157-1}{0.899241-1} \right) (31.9967) \right\} = 33.4678$$

ゆえに、求めるガイドカーブの式は

$$Y_t = 33.4678 - 31.997(0.899241)^t$$

となった。

各時点の傾向値の組織的な逐次計算は Table 7 に示すとおりである。この表のうち * および † 等の印を付した数字は表中の Y_t の合計欄の数字と比較して検算できる。

Table 7. 扉峠ブロックの平均樹高成長の修正指数曲線傾向線の計算
Calculation of guide curve of Block A.

年齢階級 Age class	t	Y_t	b^t	ab^t	$\hat{Y}_t = K - ab^t$
5	0	1.25	1.000000	31.9967	1.47
10	1	4.63	0.899241	28.7727	4.70
15	2	7.88	0.808634	25.8736	7.59
和		13.76**			13.76**
20	3	10.17	0.727157*	23.2666	10.20
25	4	12.58	0.653890	20.9223	12.55
30	5	14.65	0.588004	18.8142	14.65
和		37.40***			37.40***
35	6	16.56	0.528758	16.9185	16.55
40	7	18.29	0.475480	15.2138	18.25
45	8	19.74	0.427572	13.6809	19.79
和		54.59†			54.59 †

注) Y_t は 26 本の平均の値

Note) Y_t is mean value of 26 sample trees.

Y_t と \hat{Y}_t を比較すると樹高成長は非常によく、この修正指数曲線に適合していることがわかる。個々の観測点と、平均樹高および、ガイドカーブを Fig. 1 に示しておく。

iii) 各時点の樹高の標準偏差とその修正

このように年齢階級 t に応ずる樹高の推定値 \hat{Y}_t の点を図上で結んでガイドカーブが求められるが、これをもとにして地位指数曲線を作るには、 t における \hat{Y}_t から個々の Y_t (観測値) までの隔たり (変動) を表わす尺度 (残差の標準偏差) を考慮にいれなければならない。この残差の標準偏差とは、つぎのようにして計算されるものである。

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_t} (Y_i - \hat{Y}_t)^2}{n_t}} \dots\dots\dots (5)$$

ここに n_t は t における観測値の数である。しかし、 n_t が少ない場合には、計算された σ_t そのものに信頼がおけないので、 t を横軸に、 σ_t を縦軸にとってその関係を図上にプロットして修正し、その修正された σ_t の値 $\hat{\sigma}_t$ を用いる。 t と σ_t の関係は t が大きくなるにつれて大きくなる傾向があるが、割合ス

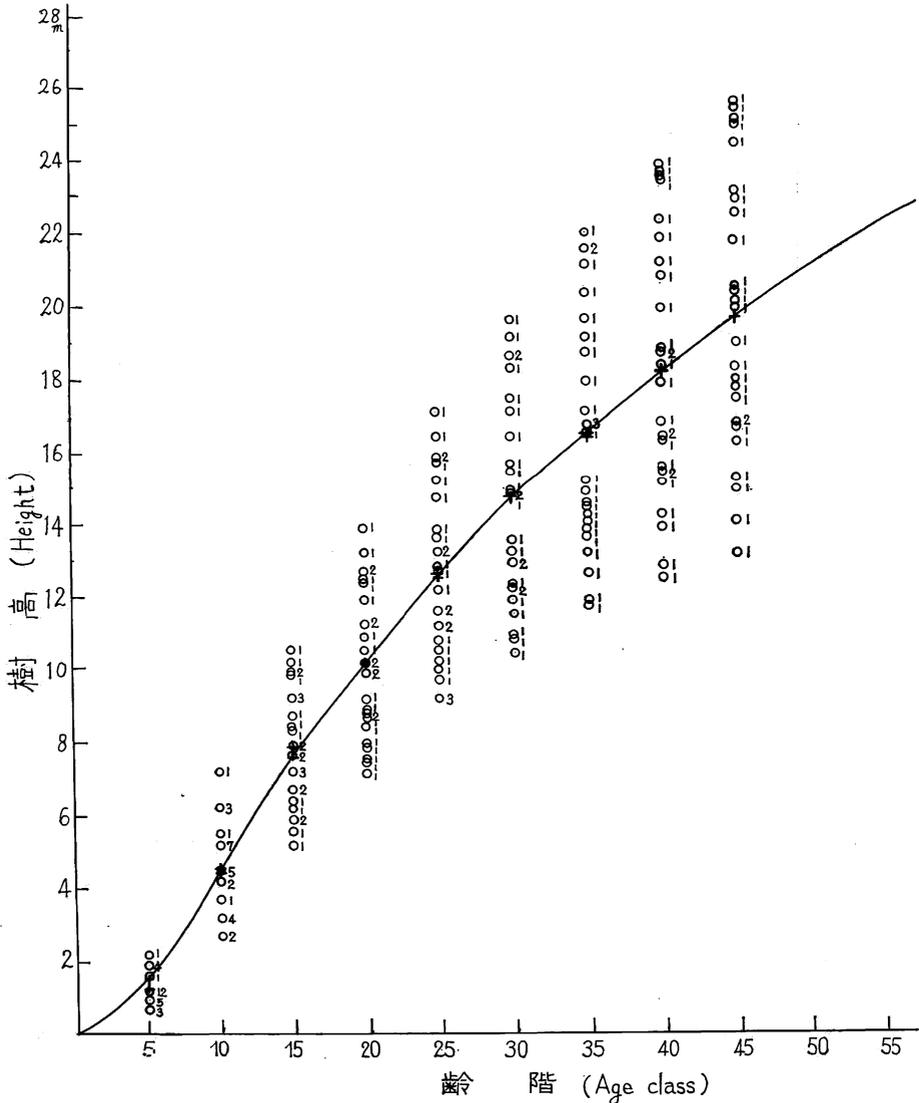


Fig.1 齡階別樹高成長量グラフ (扉峠)
Growth mean tree height (Brock A).

ーズなひとつの曲線になるので、これをフリーハンドで修正しても十分であろう。われわれのデータに対しては、次のようになった。すなわち、齡階ごとに推定された \hat{Y}_t と個々の観測値 Y_t とから (5) 式で求めた σ_t の値は次のようになった。

齡階 Age class	5	10	15	20	25	30	35	40	45
σ_t	0.478	1.149	1.546	1.920	2.419	2.805	3.141	3.441	3.687

これを図示したものが Fig.2 で、この関係をフリーハンドで修正して図から読みとった修正 σ_t の値

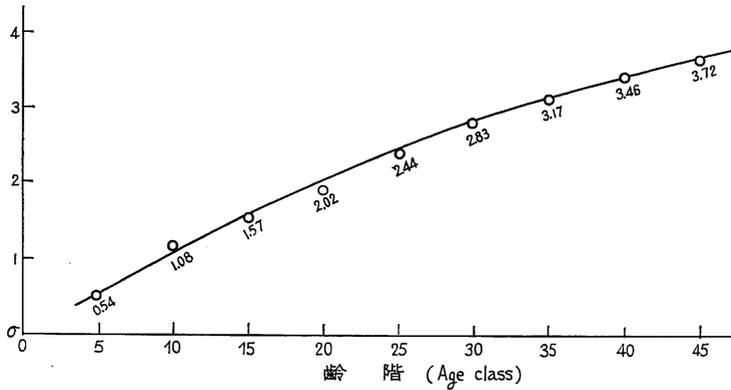


Fig.2 齡階に対する修正 σ_t (扉峠)
Graph of adjusted σ_t (Block A).

Table 8. 齡階に対する修正 σ_t の値
Adjusted σ_t for age class.

齡階 Age class t	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$\hat{\sigma}_t$	0.54	1.08	1.57	2.02	2.44	2.83	3.17	3.46	3.72

$\hat{\sigma}_t$ は Table 8 のとおりである。

iv) 地位指数曲線の決定

次の段階は t に応ずる \hat{Y}_t と $\hat{\sigma}_t$ を用いて各地位指数に応ずる 齡階ごとの樹高を算出しなければならない。地位指数は40年での平均樹高を 2m 間隔で表わすことにする。地位指数曲線を描こうとするひとつの地位指数を Y とすれば、40年でのガイドカーブの樹高 \hat{Y}_{40} と Y との隔たり $(Y - \hat{Y}_{40})$ と t における地位指数 Y の樹高 y_t と \hat{Y}_t との隔たり $(y_t - \hat{Y}_t)$ とが $\hat{\sigma}_{40}$ と $\hat{\sigma}_t$ に比例すると仮定して

$$\frac{y_t - \hat{Y}_t}{\hat{\sigma}_t} = \frac{Y - \hat{Y}_{40}}{\hat{\sigma}_{40}} = R_Y \quad \dots\dots\dots(6)$$

とおくと

$$y_t = \hat{Y}_t + R_Y \hat{\sigma}_t \quad \dots\dots\dots(7)$$

によって地位指数 Y における各齡階の樹高が算出できる。これを 地位指数ごとに結んだ曲線が地位指数曲線である。

われわれのデータに対して (6) 式から計算した各地位指数に応ずる R_Y は Table 9 のとおりである。たとえば、地位指数22の R_Y はつぎのようにして計算された。

$$R_Y = \frac{22 - 18.3}{3.46} = 1.0694$$

この R_Y を用いて、地位指数22の各齡階での樹高を (7) 式から計算したものが Table 10 である。

この各齡階の計算値を結んだものが、地位指数22の地位指数曲線である。各地位指数に対して同様の計算を行なって求めた各地位指数に対する齡階ごとの樹高の値を Table 11 に示し、そのグラフを Fig.3

Table 9. Calculation of R_Y (Block A).

Site index Y	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
R_Y	-2.9769	-2.3988	-1.8208	-1.2428	-0.6647	-0.0867	0.4913	1.0694	1.6474	2.2254	2.8035	3.3815

Table 10. Calculation of y_t (Block A).

齡 階	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$y_t = \hat{Y}_t + R_Y \delta t$	2.08	5.65	9.28	12.36	15.21	17.73	19.99	22.00	23.78

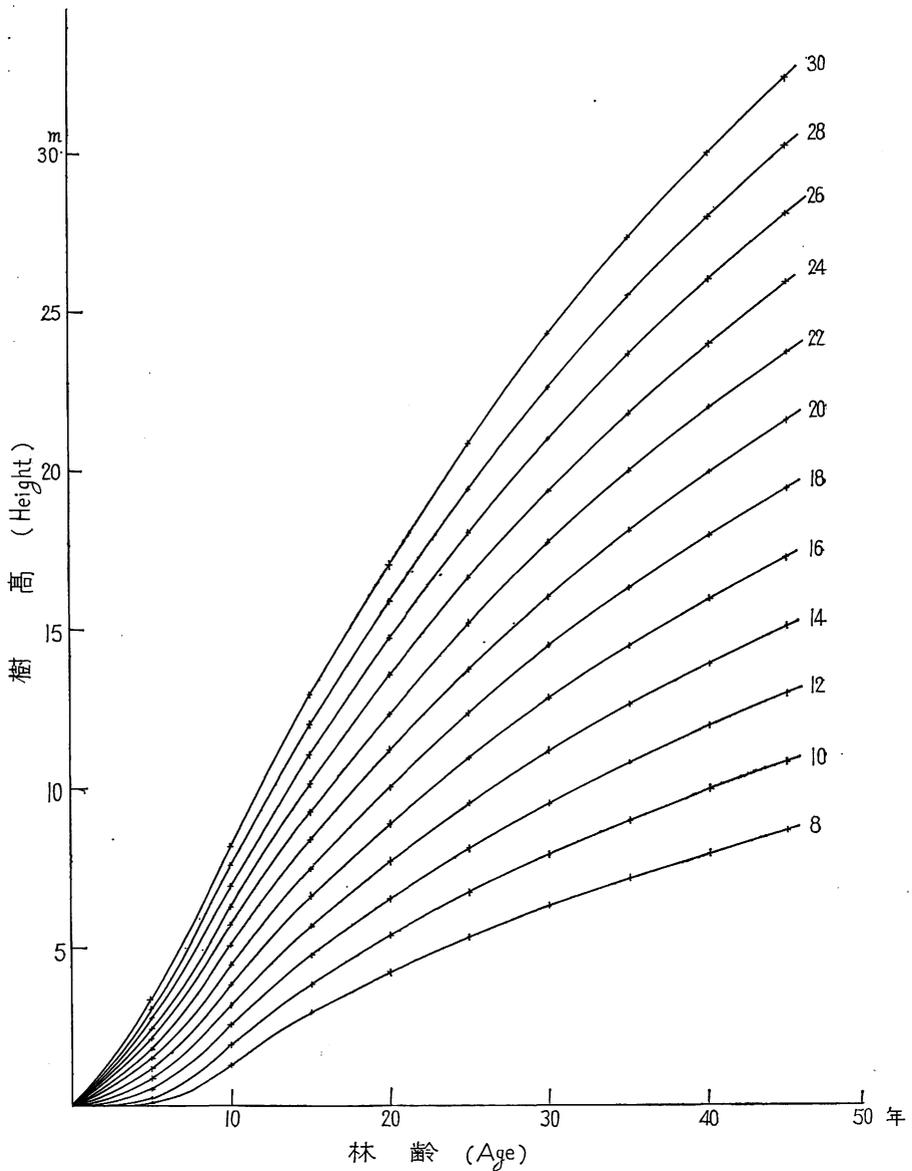


Fig.3 地位指数曲線(扉峠)
Site index curves in Brock A.

Table 11. 齡階別の各地位指数に対する樹高
Calculation of y_t for each site index (Block A).

齡階 Age class	\hat{Y}_t	$\hat{\sigma}_t$	8	10	12	14	16
5	1.5	0.54		0.20	0.52	0.83	1.14
10	4.5	1.08	1.28	1.91	2.53	3.16	3.78
15	7.6	1.57	2.93	3.83	4.74	5.65	6.56
20	10.2	2.02	4.19	5.35	6.52	7.69	8.86
25	12.6	2.44	5.34	6.75	8.16	9.57	10.98
30	14.7	2.83	6.28	7.91	9.55	11.18	12.82
35	16.6	3.17	7.16	9.00	10.83	12.66	14.49
40	18.3	3.46	8.00	10.00	12.00	14.00	16.00
45	19.8	3.72	8.73	10.88	13.03	15.18	17.33

齡階 Age class	18	20	22	24	26	28	30
5	1.45	1.77	2.08	2.39	2.70	3.01	3.33
10	4.41	5.03	5.65	6.28	6.90	7.53	8.15
15	7.46	8.37	9.28	10.19	11.09	12.00	12.91
20	10.02	11.19	12.36	13.53	14.70	15.86	17.03
25	12.39	13.80	15.21	16.62	18.03	19.44	20.85
30	14.45	16.09	17.73	19.36	21.00	22.63	24.27
35	16.33	18.16	19.99	21.82	23.65	25.49	27.32
40	18.00	20.00	22.00	24.00	26.00	28.00	30.00
45	19.48	21.63	23.78	25.93	28.08	30.23	32.38

に示す。

b) 和田峠ブロックの地位指数曲線

扉峠ブロックでの場合と同様な方法で16の抽出されたポイントで取られた16本の樹幹解析のデーターから求めた地位指数曲線は次のとおりである。

ガイドカーブは

$$\hat{Y}_t = 20.747 - 19.396 (0.872645)^t$$

Table 12. Estimated Y_t and adjusted σ_t (Block B).

齡階 Age class	Y_t	\hat{Y}_t	σ_t	$\hat{\sigma}_t$
5	1.0	1.4	0.432	0.32
10	3.9	3.8	1.169	1.25
15	6.2	6.0	2.016	2.13
20	7.9	7.9	2.805	2.92
25	9.5	9.5	3.595	3.59
30	10.9	10.9	4.165	4.13
35	12.4	12.2	4.708	4.53
40	13.2	13.3	4.684	4.76
45	14.1	14.2	4.863	4.90
50	16.3	15.1	4.904	4.97

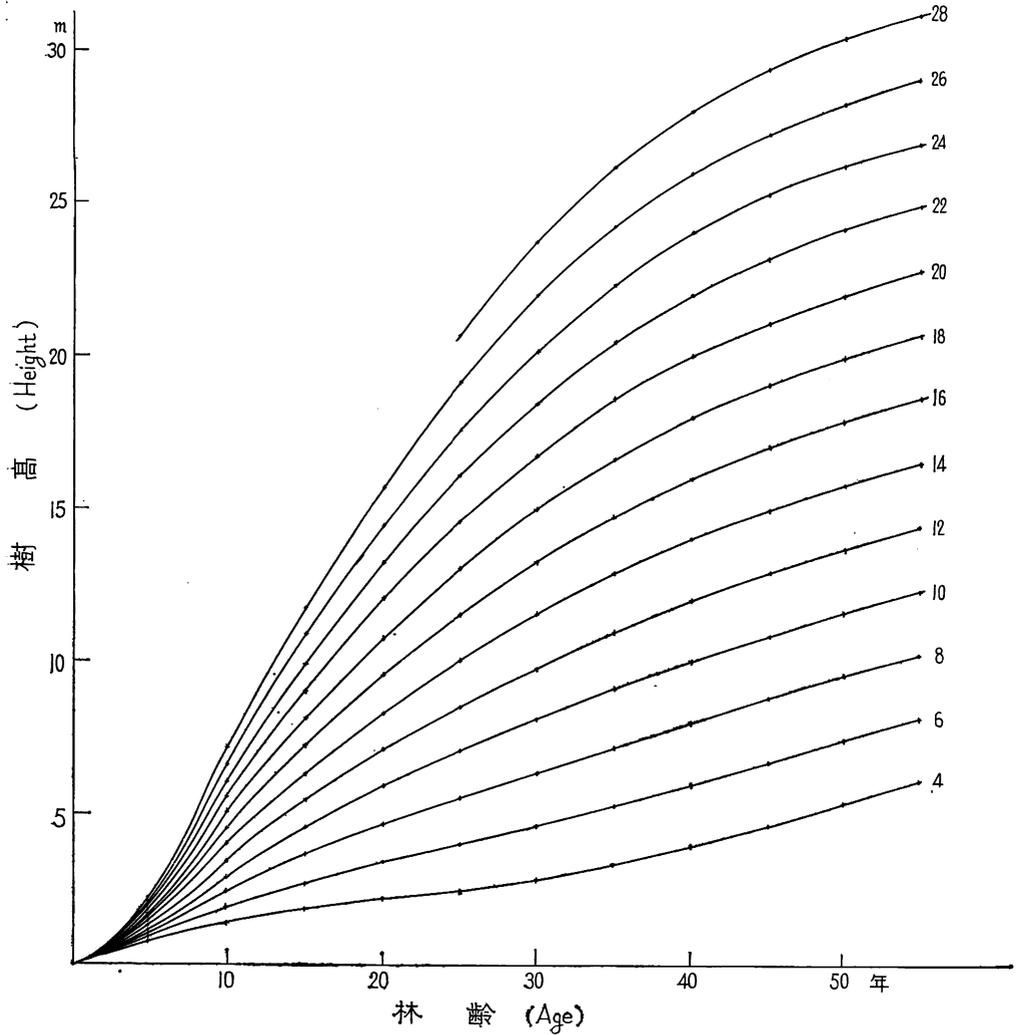


Fig.4 地位指数曲線(和田峠)
Site index curves in Block B.

Table 13. Calculation of y_t for each site index (Block B).

齡階 Age class	\hat{Y}_t	$\hat{\sigma}_t$	4	6	8	10	12	14
5	1.4	0.32	0.77	0.91	1.04	1.18	1.31	1.45
10	3.8	1.25	1.36	1.88	2.41	2.93	3.46	3.98
15	6.0	2.13	1.84	2.73	3.63	4.52	5.42	6.31
20	7.9	2.92	2.19	3.42	4.65	5.88	7.10	8.33
25	9.5	3.59	2.49	3.99	5.50	7.01	8.52	10.03
30	10.9	4.13	2.83	4.57	6.30	8.04	9.77	11.51
35	12.2	4.53	3.35	5.25	7.16	9.06	10.96	12.87
40	13.3	4.76	4.00	6.00	8.00	10.00	12.00	14.00
45	14.2	4.90	4.63	6.69	8.74	10.80	12.86	14.92
50	15.1	4.97	5.39	7.48	9.57	11.65	13.74	15.83
55	(15.8)	(5.00)	6.03	8.13	10.23	12.33	14.43	16.54

齡階 Age class	16	18	20	22	24	26	28
5	1.58	1.72	1.85	1.98	2.12	2.25	
10	4.51	5.03	5.56	6.08	6.61	7.14	
15	7.21	8.10	9.00	9.89	10.79	11.68	
20	9.56	10.78	12.01	13.24	14.46	15.69	
25	11.54	13.04	14.55	16.06	17.57	19.08	20.59
30	13.24	14.98	16.71	18.45	20.18	21.92	23.65
35	14.77	16.67	18.58	20.48	22.38	24.29	26.19
40	16.00	18.00	20.00	22.00	24.00	26.00	28.00
45	16.98	19.04	21.10	23.16	25.21	27.27	29.33
50	17.92	20.01	22.10	24.18	26.27	28.36	30.45
55	18.64	20.74	22.84	24.94	27.04	29.14	31.24

である。

齡階ごとの y_t と \hat{Y}_t , σ_t と $\hat{\sigma}_t$ を対比したものが Table 12 である。

この \hat{Y}_t と $\hat{\sigma}_t$ を用いて求めた各地位指数に対する齡階ごとの樹高の値を Table 13 に示し、そのグラフを Fig. 4 に示しておく。

c) 各ポイントの地位指数の決定

上のようにして決定された地位指数曲線を用いて、各ポイントの林齢とその平均樹高からそのポイントの地位指数が決められる。すなわち、そのポイントの林齢に対して、平均樹高を Fig. 3 および 4 にプロットしてみて、その点に最も近い地位指数曲線のもつ地位指数をその調査ポイントの地位指数とするものである。この値が Table 2 に示してある。

2. 数量化の方法

われわれは1で説明したように、92の調査ポイントを対象地域に配列し、そこでの土壤断面の調査と環境因子の調査を実行し、さらに、ポイントで選ばれた木の樹幹解析のデータから作られた地位指数曲線を利用して、各調査点に対してひとつの地位指数を付与した。このようにして与えられた地位指数は、その点のもつひとつの特性であるとみよう。この地位指数に対して土壤条件や環境因子がどのようなウエイトをもって影響しているのであろうか。また土壤条件や環境因子から林地が示す生産能力である地位指数を推定または予測することができないであろうか。

このような考え方に対してひとつの解答を与えてくれるものに、多変量解析の手法のなかで数量化の方法をとりあげることができる。

次にこの理論と、これを用いたわれわれのデータの解析結果を説明しよう。

2-1. 数量化の理論の基礎概念

ひとつの目的についてその目的物を構成する種々の要素がその目的物に対してどのような関連をもっていか、またその現象をあらゆる面からこまかく解析する手法として統計的手法、とくに多次元解析または多変量解析が使われる。

一般的に統計的手法で取り扱うものの標識は、必ず数量であるとされている。この数量に確率分布が付与

される場合は、確率変数となる。これを前提にして、種々の技術が展開されている。しかし、統計の技術を用いて論を進めようとする場合、まずここから注意してみる必要がある。当然のことながら、数量として表現する場合、なんらかの意味で等質化が行なわれており、この等質化が妥当な意味をもつか否かが注意されなければならない。これはあるものの表現の問題である。いかなるものでも実際的にはおそらくは無限の標識でなければ表現しきれないであろうが、それをあるいくつかの標識によって表現し、とらえようというのであるから、十分な考察がなされなければならない。ここに「標識を与える」ということが、われわれの目的に対して妥当であるか否か、有効であるか否か、ということと相対的にそれが操作的、機能的でなくてはならない。

われわれの目的が異なれば、同一事象、事物であっても当然与えられるべき標識は異なっていくてはならない。標識はそのものに内在する「与えられている」属性ではなく、われわれが「与える」ものなのである。ある測定方法によってえられたものが、数量的、定量的のものであろうと、定質的（関係表現を含む）のものであろうと同様である。前者は数値として表現され、後者には範疇的（カテゴリー）表現がとられることになるにすぎない。われわれが普通に使う統計的方法は線型的な関係を基礎において発展されたものであり、かつ、これ以上にでているものは少ないといえよう。このような現状であるから、以上のような数量的に測定されたものであっても、それをそのまま統計の技術で処理し、妥当な推論を下しうるとは限らない。測定された数量的標識を線型的な基礎の考えのもとに操作して、はじめて意味をもつのであって、それ以外であれば科学的な信頼をおけるものとはならない。素朴な測定量そのものを標識としてよいか否かの配慮が必要である。 X が測定されたままの数量的標識であるとしたとき、この X の変換された量 $Y=f(X)$ が一般に妥当なものである。ここで X 、 Y はベクトルでもマトリックスでもよく f はそれに応ずる函数であるとする。 Y ではなしに X を統計的方法にかけても何ら妥当な結果をうることはできないであろう。要するに、われわれの目的に対しては妥当な f の形そのものを見いだすことが大切な意味をもつのである。すなわち、われわれは測定量そのものを統計の操作によって妥当な意味をもつ量に変換しておくこと、ひいては f の形を求めておくことが大切なので、これにおいては真剣な分析はできないといえよう。

では、いかなる f の形を求むべきかの問題はきわめて肝要なものであり、これについて展開された手法が数量化の理論である。それはいくつかの場合に対して論じられているが、われわれはそのうちのひとつをとりあげて地位指数の予測を行なった。

数量化の理論では、測定されたものが数値であろうと範疇化されたものであろうと、本質的には何ら変わるころはなく、全く同じものであるとみてよい。ただ、測定対象の性格や測定方法の特性によって、測定されたものの性格は異なっている。たとえば、物理的測定とみなされる胸高直径測定の結果と、ある態度測定とみなされる土壌の色調測定の結果との違いにみられるような差異がある。しかし、これとても問題への接近方法であって、ときには物理的測定においても、態度測定の場合に似たような配慮が必要なくとも起こりうることに留意しなければならない。

さて、測定結果が数量的なものであっても、次のようにして範疇化することができる。たとえば、測定して胸高直径が51cmであったとする。このとき、20cm以上であるか否か、40cm以上であるか否か、60cm以上であるか否か。以上の問によって20cmの範囲内で範疇化されることになる。20cmの範囲がわれわれの目的に対してあらずぎて妥当なものでないとするならば、さらに範疇化を細かくしていけばよ

い。これが目的と測定方法（誤差を含む）から考えて妥当な桁だけ細かく捉えればよい。きっちりとした 51cm ということに意味があるのではなく、目的と測定方法とからいって、それがあつた範囲内にあるものとして範疇化しておくことがむしろ本質的に大切なことになっている。この配慮は検定における差の検定と内容的に意味のある差ということの関係にも現われる大切なことである。われわれの得た数値は単独のひとつの点としての数値で意味をもつのではなく、ある幅をもって妥当化されうるものであるということ銘記しなければならない。

以上とは逆に、範疇化されてとらえたものを、無理に数値化して処理しようとする場合もある。たとえば有限の範疇に 0, 1, 2, …… のように数値を与えて数量的測定と全く同様に考えて操作しようとする場合である。これらは全く任意なものといえるのであつて、等間隔、単調等ということが真に意味をもたない限り全く信頼のおけないものになり、数値化の仕方次第ではどのような結論も導きだせるものである。

以上の前置きで述べたことは、この内容如何を問わず、素朴な測定結果そのものを統計的手法にかけて扱う前に、その内的意味、妥当性を検討して測定結果のもつ性格や「目的と妥当な関係」をもつように変換したり、あるいはそれを範疇化して表現し、これを再び立場を明らかにして数量化し直さねばならないという点である。

さて、数量化を実行しようとする場合、目的の限定とともに、もうひとつの重要なことがある。それは「外的基準がある場合」、「外的基準がない場合」の 2 つを明確に意識することである。前者はわれわれの目的が要因パタンからねらうところの「外的なもの」を予測推定することが目的なのである。後者は分類というようなものを考える場合である。すなわち項目 (item) に対する範疇への反応パタンが存在しており、そのうち同じようなパタンをもつものを幾つかに組み分けすることが目的である。組み分けすべき数はきまっていないし、全く同じパタンをもつものも少ないのである。そこでわれわれは、ある立場から組み分けの基準を作ることから始めなければならない。分類を考える場合は分類されるもの間の距離というものや、その近さというようなものの定義を総合的立場からわれわれの分類の目的に応じて規定し、これを操作することによって分類しようとするものを数量化し、この数量によって組み分けを行なおうとするのである。要するに、外的基準のない場合はわれわれがつくつたある基準を最もよく表現するように数量化を行なえばよいことになる。この場合は、前者の場合のようなきめ手はない。距離というものの定義もわれわれが合理的にという立場からとるのであつて、それは幾とおりもありうる。したがつて、この場合得られた結果はひとつの合理的な知識を与えるものであつて、これを足掛りにものを考えるところに意味がある。

以上、数量化を行なう場合についての基本的な概念を一般的な見方から説明したが、われわれはこの考え方を林地における土壌条件や環境因子を要因とし、これらを数量化の理論の場にもちこみ、妥当な数量を与え、ひいては地位指数すなわち外的基準を推定予測する数量化における第一の場合を実行したのである。つぎにこの数量化の理論を説明しよう。

2—2. 数量化の理論—外的基準が数量で与えられている場合—

現象がある変量 Y で記述されるものとし、かつ Y は数値をとるもの（すなわち、 Y は変数）とする。このとき、 Y の起こり方を予測するために、 M 個の項目 (item) について測定を行ない、それらに基づいて Y の値を予測する場合を考える。

これらの項目についての測定結果がすべて数値であれば、これらの項目は M 次元の変量 (X_1, X_2, \dots

..., X_M) で表わされ, この (X_1, X_2, \dots, X_M) を用いて Y の起こり方を予測する問題はいわゆる多変量解析の問題となる。しかし, ここで問題にするのは, 各 X_j が数値をとる (すなわち変数の) 場合ではなく, X_j の測定結果が定質的なものとして, すなわちいくつかの範疇 (カテゴリー) への分類として得られる場合である。いま, これらカテゴリーを次の表のようなものであるとする。

Table 14. 項目とカテゴリーの構成表
Table of item and category.

項目番号 Item	1	2	...	M
変量 Variable	X_1	X_2	...	X_M
カテゴリー Category	$C_{11}, C_{12}, C_{13}, \dots, C_{1r_1}$	$C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2r_2}$...	$C_{M1}, C_{M2}, \dots, C_{Mr_M}$

上述のことは各 X_j の測定結果が, そのカテゴリー $C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jrl}$ ($j=1, 2, \dots, M$) のうちのいずれかのひとつにはいるという意味である。

いま, 各 X_j の各カテゴリーに対して, Table 15 のように1つずつ数量を与えることを考える。

Table 15. カテゴリーと数量の対応表
Category and quantity.

カテゴリー Category	$C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1r_1}$	$C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2r_2}$...	$C_{M1}, C_{M2}, \dots, C_{Mr_M}$
数量 Quantity	$t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1r_1}$	$t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2r_2}$...	$t_{M1}, t_{M2}, \dots, t_{Mr_M}$

この場合数量の与え方はいかようにでもできるから, なんらかの規準がなければならぬ。しかし, Y の予測に役に立たない。それでここに規準を設ける。この規準とは, 一般的にいえば, Y の予測において起こる誤差をできるだけ小さくするという形で表現される。しかし, これだけではまだ規定が広すぎるので, ここでは (X_1, X_2, \dots, X_M) を

$$\hat{Y} = X_1 + X_2 + \dots + X_M \quad \dots\dots\dots(9)$$

の形で総合して \hat{Y} で Y を予測する場合にそのときの誤差をできるだけ小さくすることに決めることにする。それには最小二乗法の意味で考えればよい。すなわち

$$E[(Y - \hat{Y})^2] = \min. \quad \dots\dots\dots(10)$$

にすればよい。

上の規準によって各カテゴリー C_{jk} に数量 t_{jk} の最もよい値 t_{jk}^* をきめれば (9) によって \hat{Y} を数値として与えることができ, これによって Y を予測することができる。

項目とカテゴリーおよび外的基準の関係は, 次の表でいっそう明確に理解されよう。すなわち, i なるものが外的基準として数量 Y_i をもち, 各項目においていずれかひとつのカテゴリーに反応を示すものとする, 要因パターンとして次表のような項目カテゴリーの反応として表現される。

ここに V 印はそれが反応するところを示す。

われわれとしては V 印の反応パターンから Y を最も能率よく予測できればよいのである。それには, 上で述べた規準によって, もっともよい数量の組 $\{t_{jk}^*\}$ を決めればよいのである。

さて制限式 (10) は Y と \hat{Y} の相関係数を最大にすることと同値である。そこで \hat{Y} の第 1 次近似の意味

Table 16. 項目カテゴリーの反応パターン
Reaction pattern table of item and category.

番号 No.	項目 Item	X_1	X_2	...	X_M
	カテゴリー Category	$C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1r_1}$	$C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2r_2}$...	$C_{M1}, C_{M2}, \dots, C_{Mr_M}$
	外的基準 Outsider				
1	Y_1	∨	∨		∨
2	Y_2	∨	∨		∨
∴	∴				
i	Y_i	∨	∨		∨
∴	∴				
n	Y_n	∨	∨		∨
合計 Total	$\sum_{i=1}^n Y_i$	$n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1r_1}$	$n_{21}, n_{22}, \dots, n_{2r_2}$...	$n_{M1}, n_{M2}, \dots, n_{Mr_M}$

で次の量を定義する。すなわち、各サンプル i に α_i なる数量を与える。この α_i は各項目、カテゴリーに与えるべき数量 t_{jk} の和を取ることとする。すなわち、 t_{ji} を i なるプロットにおいて j 番目の項目でチェックされたカテゴリーに与えるべき数値を表わすとすれば、

$$t_{1i} + t_{2i} + \dots + t_{Mi} = \alpha_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots(11)$$

とおける。

この α_i と Y_i の相関係数 ρ を考える。 ρ は次式で与えられる。

$$\rho = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(\alpha_i - \bar{\alpha}) / \sigma_Y \sigma_\alpha \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここに $\sigma_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2, \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

われわれの目的のためには ρ を最大にするように t_{jk} を作る事が望ましい。

相関係数は原点のとり方に依存しないから

$$\bar{\alpha} = 0, \quad \bar{Y} = 0$$

としても一般性を失なわない。したがって、

$$\rho = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \alpha_i / \sigma_Y \sigma_\alpha \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここに、 $\sigma_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2, \quad \sigma_\alpha^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$ である。

さて、 ρ が最大になるように l 項目の m カテゴリーに数量 t_{lm} を与えることにしよう。このために

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_{lm}} = 0 \quad (l=1, 2, \dots, M, \quad m=1, 2, \dots, r_M)$$

た、予測、推定の基準を定めるために、実測値と推定値との差の平均、標準偏差は次で計算できる。

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}$$

したがって、 \bar{x} は 0 に近ければ近いほど、また標準偏差は小さければ小さいほど、推定の精度、すなわち与えるべき数量が妥当であることを意味する。

さらに、多変量解析の意味を一般化して考えるために、外的基準および各因子相互間の内部相関行列を計算し、これをもとにして、重相関係数および偏相関係数が求められる。

R を内部相関行列とすれば、

$$\text{重相関係数 } \rho_{Y:1, 2, 3, \dots}, M = \sqrt{1 - |R|/R_{YY}} \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$\text{偏相関係数 } \rho_{Y, j:1, 2, \dots}, M = \frac{R_{Yj}}{\sqrt{R_{YY} R_{jj}}} \quad \dots\dots\dots(22)$$

ただし R_{ij} は R の i 行 j 行の要素の余因子である。

重相関係数は、前述のごとく、推定の精度を表わし、偏相関係数は、外的基準に対してそれを構成しているそれぞれの項目について、他の項目を固定あるいはその影響を除去した場合の、その項目と外的基準との相関係数である。したがって、これは外的基準に対して、その項目がどの程度のきき方を示すかの尺度となるものである。

3. 和田国有林の調査資料での解析結果

以上 2 で述べた数量化の方法をわれわれのデーターに対して解析した結果を述べよう。今回の調査では、環境因子として標高、方位、傾斜を、土壌因子として土壌型 A_1 層深度、有効深度、腐植含量、土性と石礫、土壌構造、母材をとり上げた。これらの要因の他にも、カラマツ林分の地位と密接に関係すると思われるものに、その林分の現在の構造を規定する因子、すなわち、林齢、立木度、断面積、材積等々が考えられるが、今回の調査が上記 9 要因に限定したのは、土壌条件とカラマツの成長の関係を分析することにその目的があったことによるものである。

3-1. 項目とカテゴリーの分類

つぎに上記 9 要因の分類について説明しよう。

(1) 外的基準 (Y)

これは地位指数を用い、各調査ポイントごとの地位指数は Table 2 に付記してある。

(2) 土壌型 A_1 層深度 (X_1)

	浅	中	深	頗	深
B _I (dry)	① ~ 5 cm	6 ~ ② 10 cm	11 ~ ③ cm	—	
B _{LD}	④ ~ 5 cm	6 ~ ⑤ 10 cm	11 ~ ⑥ 15 cm	16 ~ ⑦	cm
B _{LE}	⑧ ~ 10 cm	11 ~ ⑨ 15 cm	16 ~ ⑩ cm	—	

注：表中①②③……等は取りまとめの上で仮に与えた記号である。調査で観測されなかったカテゴリーは対象母集団では該当するものがないものと認め、観測したカテゴリーについてのみ通しの番号をつけてある。

(3) 有効深度 (X_2)

浅 ~ 30cm	中 31 ~ 50cm	深 51cm ~
①	②	③

(4) 腐植含量 (X_3)

上層 10cm	頗 富	富	含	乏
下層 30cm	頗 富	富	含	乏
頗 富	①	/	/	/
富	②	③	/	/
含	④	⑤	/	/
乏	⑥	⑦	/	/

(5) 土性・石礫 (B層または 30cm 付近を中心), (X_4)

	堆積式	細粒	中粒	粗粒	石礫質
乾性 B/A, B/B, B/C	残積土	①	②	③	/
適潤 B/D, B/E	残積土	④	⑤	/	/
	葡行土	⑥	⑦	⑧	/
	崩積土	⑨	⑩	⑪	/

(6) A-B層構造 (X_5)

10cm 上	Cr				Gr				
30cm 下	Cr	Bk	無	Ms	Nu	Gr	Bk	無	Ms
	①	②	③	④	⑤	⑥	/	⑦	⑧

(7) 標高 (X_6)

高さ	1201~1400m	1401~1600m	1600~ m
	①	②	③

(8) 方位 (X_7)

方位	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
カテゴリー	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧

(9) 傾斜 (X_8)

要因	平 ~8°	緩斜 9°~22°	傾斜 23°~35°	36°~
カテゴリー	①	②	③	/

(10) 母材 (X_9)

安山岩 2	新第三紀凝 灰岩 14	火山灰 15	15+2	2+15	15+14
①		②	③	④	⑤

以上 9 要因に対してわれわれは過去の土壌調査の経験からそれぞれの項目に対して、上記のような範疇化を行なった。これらの範疇化の仕方は地位の予測という目的に対しては現時点ではもっとも妥当と考えられるものであるし、また、この解析の結果からもそのことが証明された。

われわれは上記 9 要因の各カテゴリーに対して数量化を行なったのであるが、最後の項目である母材はこの調査対象地ではほとんどの点で同じ火山灰であったのでこれを同一とみなし、除外した場合との 2 例について計算した。あとで説明する結果表に I の場合と記したのは前者であり II の場合と記したのは後者の場合である。

3-2. 調査結果の分類表

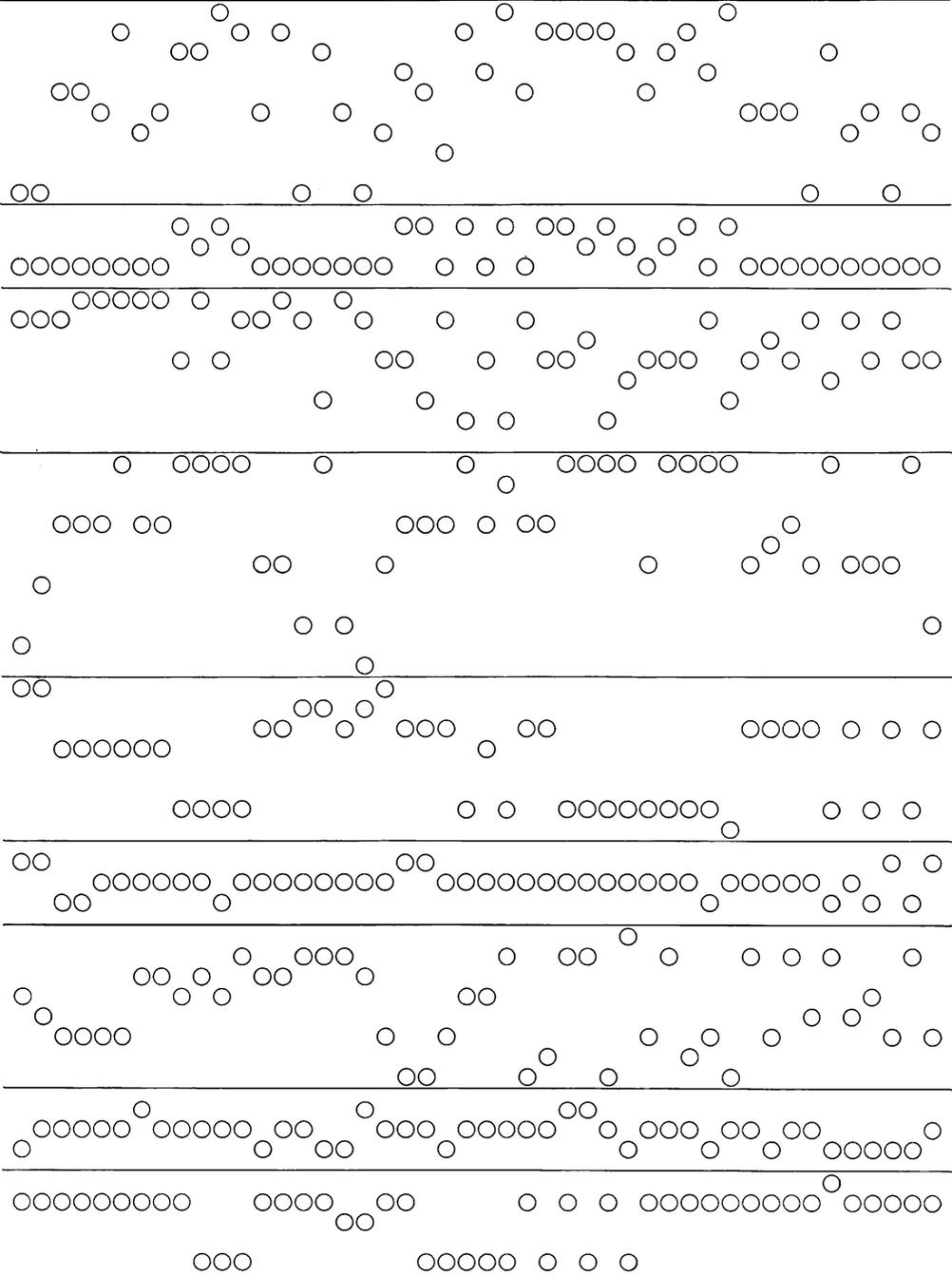
調査ポイント 92 に対して、各ポイントでの調査結果が前節で述べた各項目のどれか 1 つのカテゴリーに反応チェックされた。この結果を反応パタン表として Table 17 に示す。

次にこの表をもとにして各項目カテゴリー間のクロス集計を作らなければならない。その作り方は次のように行なう。例を第 1 項目土壌型にとろう。まず、各項目カテゴリーと地位指数 (外的基準) の欄の作られたホールソートカードを用意し、各調査点の反応をパンチする。このカードは調査点の数 92 枚作られる。つぎに土壌型 (X_1) の第 1 カテゴリー①をもつものを選び出す。われわれの例ではこのカードは 3 枚あった。この 3 枚を第 2 の項目有効深度 (X_2) で分類する。この 3 枚は X_2 の各カテゴリーのいずれかに入るであろう。われわれの例ではすべて X_2 の第 1 のカテゴリーにはいった。そこでこの X_2 の各カテゴリーごとにカードの枚数と地位指数を合計する。次に同じくこの 3 枚を込みにして、第 3 の項目腐植含量 (X_3) で分類し、 X_3 の各カテゴリーのいずれかに仕分けられる。そこでも前と同じ各カテゴリーでのカードの枚数と地位指数を合計する。われわれの例では、 X_3 の第 4, 6, 7 の各カテゴリーにそれぞれ 1 枚ずつのカードが分類され、その地位指数の合計はこの順に 4, 10, 12 で合計 26 となる。この地位指数の和 26 は前の場合と一致してチェックされる。このような操作を X_4, X_5, \dots, X_9 までの項目に対してつづける。この過程を X_1 の第 2, 3, 4, $\dots, 10$ カテゴリーについてくり返す。こうして作られたのが Table 18 である。

同じような表が X_2 でのカテゴリーで分類した場合についても作られる。この場合は、2 回目以後の分類は X_3, X_4, \dots, X_9 までに対して行なえばよい。すなわち、ここでは X_2 に対する X_1 の分類はもはや必要ない。 $X_3, X_4, X_5, \dots, X_9$ の各カテゴリーに対して分類してゆく過程も全く同様である。これらの結果は Table 19 のクロス表にまとめ上げられる。この Table 19 において、 X_1 の初めの 10 行が Table 18 で作られたものである。このクロス表は連立方程式 (20) の係数行列である。しかし、全標本数に対して、カテゴリー間の反応頻度に大きなかたよりが現われると、その場合の解は不安定なものとなることが経験から知られている。数量化の理論の中には、この点になんらの制限もないのであるが、実際計算の結果、こうしたことが起こりうる。このような場合、要因についてのカテゴリー区分を等質性を考慮して適当にまとめた方がよい結果が得られることがある。われわれの場合、たとえば土壌型 (X_1) についてみるとカテゴリーへの反応頻度は次のとおりであった。

38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83

26
16
22
16
24
14
24
22
20
18
10
6
10
14
18
14
10
12
10
18
14
12
14
10
16
20
20
20
22
22
20
18
16
24
16
12
4
12
10
12
14
10
12
14
10
12
8
6
28
26



X_4	⑥		1 16			1 18	8 154	7 150	1 24	3 64	4 90	25 516
	⑦						3 56	1 26			2 48	6 130
	⑧						1 16					1 16
	⑨					1 22	2 38	1 26		1 28	2 44	7 158
	⑩						1 24				4 92	5 116
	⑪									1 20	1 20	
構造 X_5	①			1 16			1 24	3 70			3 78	6 148
	②			1 16			1 24	1 24			3 66	6 130
	③		2 34		1 20	5 100	16 306	6 126	2 40	3 74	7 150	43 866
	④		1 10		1 14	2 14	2 24	1 14		1 18		8 94
	⑤		1 14									1 14
	⑥			2 26								2 26
	⑦	2 16	9 114	9 128	1 6	1 18	3 46					25 328
	⑧	1 10										1 10
標高 X_6	①		1 22	1 20	1 20	2 46	4 92	5 118		2 50	3 76	19 444
	②	2 22	11 138	8 110	1 14	4 72	11 194	6 116	2 40	2 42	10 218	57 966
	③	1 4	1 12	4 56	1 6	2 14	7 114				16 206	
方位 X_7	①			1 14			3 64					4 78
	②	1 12	5 62	3 44			5 90				2 46	16 254
	③		1 16	2 26			4 70			1 22	4 86	15 274
	④	1 4	1 10	1 10	1 14		3 48	1 22			3 68	11 176
	⑤		1 14			1 26	2 34	1 24		1 18	3 72	9 188
	⑥		1 10	2 28	1 6	3 32	3 58	3 72	1 16	1 24	1 22	16 268
	⑦		2 28					1 18	1 24			4 70
	⑧	1 10	2 32	4 64	1 20	4 74	2 36	2 44		1 28		17 308
傾斜 X_8	①		2 22	5 66	2 34	1 18	2 46	1 14		1 28	2 42	9 170
	②	3 26	9 120	8 120	1 6	5 66	11 194	5 110	1 24	3 64	6 136	50 840
	③		2 30			2 48	9 160	5 110	1 16		5 116	33 606
母材 X_9	①		1 12	1 14			1 16					3 42
	②	1 10	8 108	6 82	2 26	6 94	14 250	9 190	1 24	3 68	7 166	57 1018
	③			4 64		1 18	5 94	1 18		1 24	5 104	17 322
	④						2 40	1 26			1 24	4 90
	⑤	2 16	4 52	2 26	1 14	1 20			1 16		11 144	
合計 Total		3 26	13 172	13 186	3 40	8 132	22 400	11 234	2 40	4 92	13 294	92 1616

(I の場合)

(case I)

③② ③③ ③④ ③⑤ ③⑥ ③⑦ ③⑧ ③⑨								④① ④②			④③ ④④ ④⑤ ④⑥ ④⑦ ④⑧ ④⑨ ⑤①								⑤② ⑤③			⑤④ ⑤⑤ ⑤⑥ ⑤⑦ ⑤⑧				地位指数 合計 Sum of site in- dex			
構 造 X ₅								標 高 X ₆			方 位 X ₇								傾 斜 X ₈			母 材 X ₉							
1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	1	2	3	4		5		
0	0	0	0	0	0	2	1	0	2	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	3	0	0	1	0	0	2	t ₁₋₁	26	
0	0	2	1	1	0	9	0	1	1	1	0	5	1	1	1	1	2	2	2	9	2	1	8	0	0	4	t ₁₋₂	172	
0	1	1	0	0	2	9	0	1	8	4	1	3	2	1	0	2	0	4	0	5	8	1	6	4	0	2	t ₁₋₃	186	
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	2	1	0	2	0	0	1	t ₁₋₄	40	
0	0	5	2	0	0	1	0	2	4	2	0	0	0	0	1	3	0	4	1	5	2	0	6	1	0	1	t ₁₋₅	132	
0	1	16	2	0	0	3	0	4	1	1	7	3	5	4	3	2	3	0	2	2	1	1	1	4	5	2	0	t ₁₋₆	400
3	1	6	1	0	0	0	0	5	6	0	0	0	3	1	1	3	1	2	1	5	5	0	9	1	1	0	t ₁₋₇	234	
0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	t ₁₋₈	40	
0	0	3	1	0	0	0	0	2	2	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	3	0	0	3	1	0	0	t ₁₋₉	92	
3	3	7	0	0	0	0	0	3	1	0	0	2	4	3	3	1	0	0	2	6	5	0	7	5	1	0	t ₁₋₁₀	294	
0	0	3	0	0	0	8	1	2	9	1	0	3	0	3	0	0	2	4	1	1	0	1	0	0	5	t ₂₋₁	150		
0	0	0	0	0	1	7	0	0	6	2	1	4	2	0	0	0	0	1	1	4	3	1	2	1	0	4	t ₂₋₂	104	
6	6	4	0	8	1	1	1	0	1	7	4	2	1	3	8	9	1	6	2	1	2	9	2	4	8	2	t ₂₋₃	1362	
0	0	3	5	0	1	1	0	1	7	2	0	1	5	0	0	4	0	0	1	7	2	0	8	1	0	1	t ₃₋₁	134	
3	3	14	1	1	0	3	0	5	1	8	2	0	2	6	4	5	5	1	2	2	1	3	1	0	2	1	t ₃₋₂	478	
2	0	1	0	0	0	1	0	1	3	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	3	0	1	0	2	1	t ₃₋₃	82	
1	1	18	2	0	0	1	1	0	4	2	7	2	8	1	5	2	5	3	7	3	2	0	1	2	1	3	t ₃₋₄	572	
0	1	3	0	0	0	4	0	4	1	3	2	1	0	0	1	1	0	3	2	4	2	2	3	1	1	1	t ₃₋₅	160	
0	1	2	0	0	1	1	1	2	3	1	0	2	1	0	1	0	0	2	0	2	4	0	4	1	0	1	t ₃₋₆	102	
0	0	2	0	0	0	4	0	2	3	1	0	1	1	2	0	0	0	2	0	4	2	0	3	1	0	2	t ₃₋₇	88	
0	1	0	1	0	1	2	1	2	1	6	7	1	9	1	3	0	3	1	7	2	1	4	9	0	6	t ₄₋₁	316		
0	0	0	0	1	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	t ₄₋₂	26	
0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	2	0	1	1	0	0	t ₄₋₃	30	
0	0	10	6	0	0	1	0	3	1	3	0	1	2	2	1	4	1	6	2	1	2	3	0	9	3	1	4	t ₄₋₄	268
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	t ₄₋₅	20	
2	1	19	1	0	0	2	0	7	1	6	2	1	2	8	3	3	6	2	0	3	1	4	8	0	2	1	0	t ₄₋₆	516
2	0	4	0	0	0	0	0	3	1	2	0	0	1	0	3	0	0	2	0	3	3	1	2	2	1	0	t ₄₋₇	130	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	t ₄₋₈	16	
0	1	6	0	0	0	0	0	2	5	0	1	2	0	1	0	1	0	2	1	4	2	0	4	3	0	0	t ₄₋₉	158	
2	2	1	0	0	0	0	0	2	3	0	1	0	1	2	1	0	0	0	0	2	3	0	3	0	2	0	t ₄₋₁₀	116	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	t ₄₋₁₁	20	
6								4	2	0	0	0	1	2	1	1	0	1	0	2	4	0	4	0	2	0	t ₅₋₁	148	
	6							2	4	0	1	2	1	1	0	1	0	0	1	3	2	0	4	1	1	0	t ₅₋₂	130	
		43						11	27	5	2	5	9	3	6	7	3	8	5	2	2	16	1	27	1	1	3	t ₅₋₃	866
			8					0	6	2	0	0	2	1	1	4	0	0	1	7	0	0	7	0	0	1	t ₅₋₄	94	
				1				0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	t ₅₋₅	14	
					2			0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	2	0	1	1	0	0	t ₅₋₆	26	
						25		2	1	6	7	1	9	1	4	0	2	1	7	2	1	5	8	2	1	2	0	t ₅₋₇	328
							1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	t ₅₋₈	10	
								19			1	0	3	2	2	4	0	7	2	1	0	7	0	14	2	2	1	t ₆₋₁	444
								57			3	1	2	1	1	5	5	8	4	9	7	3	3	1	3	1	9	t ₆₋₂	966
								16			0	4	1	4	2	4	0	1	0	7	9	3	9	2	1	1	t ₆₋₃	206	
											4								1	2	1	0	0	2	1	1	t ₇₋₁	78	
											16								2	7	7	2	9	2	0	3	t ₇₋₂	254	
												15							3	8	4	0	9	4	1	1	t ₇₋₃	274	
													11						0	6	5	0	6	1	1	3	t ₇₋₄	176	
														9					0	5	4	1	8	0	0	0	t ₇₋₅	188	
															16				1	9	6	0	1	4	1	0	1	t ₇₋₆	268
																4			0	4	0	0	3	0	0	1	t ₇₋₇	70	
																	17		2	9	6	0	8	7	1	1	t ₇₋₈	308	
																			9			0	4	4	0	1	t ₈₋₁	170	
																			50			2	3	1	7	2	8	t ₈₋₂	840
																				33		1	2	2	6	2	2	t ₈₋₃	606
																						3						t ₉₋₁	42
																							57					t ₉₋₂	1018
																								17				t ₉₋₃	322
																									4			t ₉₋₄	90
																											11	t ₉₋₅	144

Table 19.

(Case

	1 2 3 4 5 6 7	8 9 10	11 12 13 14 15 16	17 18 19 20 21 22
	土壤型 X_1 ①+②③④+⑤⑥⑦⑧+⑨⑩	有効深度 X_2 ⑪ ⑫ ⑬	腐植含量 X_3 ⑭⑮+⑯⑰⑱⑲⑳	土性・石礫 X_4 ㉑+㉒㉓㉔+㉕㉖㉗+㉘㉙㉚+
1	16	9 3 4	2 3 5 1 2 3	14 1 1 0 0 0
2	13	1 5 7	2 0 5 3 2 1	13 0 0 0 0 0
3	11	2 0 9	1 3 5 0 2 0	1 8 1 0 1 0
X_1 4	22	0 0 22	3 3 11 3 0 2	1 6 8 4 2 1
5	11	0 0 11	2 5 4 0 0 0	0 2 7 1 1 0
6	6	0 0 6	0 3 2 1 0 0	0 1 4 0 1 0
7	13	0 0 13	0 12 1 0 0 0	0 0 4 2 2 5
8		12	0 0 6 0 3 3	9 3 0 0 0 0
X_2 9		8	1 2 3 1 1 0	8 0 0 0 0 0
10		72	9 27 24 7 2 3	12 15 25 7 7 6
11			10	3 4 2 0 1 0
12			29	4 5 10 3 2 5
X_3 13			33	10 7 10 3 3 0
14			8	4 0 1 1 1 1
15			6	4 2 0 0 0 0
16			6	4 0 2 0 0 0
17				29
18				18
X_4 19				25
20				7
21				7
22				6
23				
24				
X_5 25				
26				
27				
28				
X_6 29				
30				
31				
X_7 32				
33				
34				
35				
36				
37				
X_8 38				
39				

カテゴリー	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	計
頻 度	3	13	13	3	8	22	11	2	4	13	92

標本数92に対して①, ④, ⑧, ⑨の頻度は数%にしか過ぎない。これをそのまま計算を進めることは上のような不安が想定されたので、これを①+②, ③, ④+⑤, ⑥, ⑦, ⑧+⑨, ⑩と都合7つのカテゴリーにまとめて計算することにした。同じような考え方に従って X_3, X_4, X_5, X_7 の各項目でもいくつかのカテゴリーをグループした。しかし、参考のために、上のようなグルーピングしない場合の解をも求めたら逆にグループした場合よりもよい結果となったので、この両方を記載する。グループしない場合をIの場合、グループしたものをIIの場合とする。このIIの場合では前述の母材が除外されている。

さらに、クロス表に対して、つぎの吟味が必要である。それは、各要因カテゴリー間の反応に従属関係がないかどうかということである。たとえば、第 j 項目の k カテゴリーに反応があるときは必ず第 m 項目の l カテゴリーに反応があるというような場合である。こういう現象が起こるとクロス行列において、ある列またはある行同志が比例するということになり、行列の階数が落ちることになり、解が不定になるからである。

3-3. 計算と結果表

これらのチェックが終われば、このクロス表をもとにして計算にはいれる。われわれは与えるべき数量に対する解釈を一般化するために、つぎのような計算試行を行なった。

(1) 各項目カテゴリーの反応頻度のかたよりが解の安定度にどんな結果を示すかを明らかにするために、9項目のすべてのカテゴリー58に対する場合と、いくつかの項目でカテゴリーをグループし、母材を除いた8項目、39カテゴリーに対する場合の両者を計算する。

(2) 取り上げた個々の項目が地位指数の表現にどのような関係を示しているかをみるために、一度に全項目を取り入れず、取り入れるべき項目を1個ずつ追加してゆき、そのつど、重相関係数を計算し、地位に対する各項目の現象表現力の尺度としたい。

さて、連立方程式を解くにあたって、理論の項でも述べたとおり、クロス表の性質として各項目間に

$$\sum_{i=1}^n \delta_i(j, k) = n_{ik} \quad (j = 1, 2, \dots, M)$$

$$\sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^n \delta_i(j, k) \right) = n \quad (j = 1, 2, \dots, M)$$

$$\sum_{m=1}^r f_{lm}(j, k) = n_{ik} \quad \left(\begin{matrix} j = 1, 2, \dots, M \\ l = 1, 2, \dots, M \end{matrix} \right)$$

なる関係があることにより $f_{lm}(j, k)$ の係数行列式が0になるために解が一意的に決められない。そこで、第1項目を除き、他の項目から1つずつ(任意に)カテゴリーを落して、すなわち、求めるべき根を0と仮定して解くことが必要である。そのためには理論の項でも述べた $t_{j1} = 0$ ($j = 2, 3, \dots, M$) として計算を始めた。このことは数量化は各項目間における相対的なウェイトを与える立場から一般性を失わない。したがって、ここではIの場合が50元 (=58-8)、IIの場合が32元 (=39-7) の連立方程式を解くことで満たされる。

つぎに、求められた数量(根)を基にして、実測値(Y)と推定値(\hat{Y})の重相関係数および各項目間

の偏相関係数を計算する。この際、計算の過程として各項目間の内部相関行列も計算された。

これらの結果は Table 20, 21 にまとめられている。

以上の計算は手計算で解くことは不可能である。われわれはこれを日本ビジネスコンサルタント株式会社に依頼した。用いた電子計算機は HITAC 3010 である。

3-4. 結果の解釈

Table 20 には地位指数 Y を表現するために、各項目を逐次に取りあげた場合の数量化された与えられるべき数値 (これを点数, スコアと呼ぶ) が与えられている。したがって 9 要因をすべてとりあげたときのスコア, すなわち, Table 20 の要因項目群スコアの最後の列の数値が I の場合には 58 カテゴリーに与えられるスコアである。このスコアを Table 17 の各プロットごとの反応表のチェックされたところに荷重して加え合わせたものがその点での地位指数の推定値になる。われわれの調査した 92 点についての実際の地位指数 (Y) と上のスコアを荷重して求められた推定された地位指数 (\hat{Y}) および $Y - \hat{Y}$ を Table 22 に示す。

Table 22 のように数量化された項目によって地位指数は非常にうまく推定できることがわかる。また Table 20 の下の方に、重相関係数 ρ が計算されている。これは、各項目を逐次とりあげた場合において地位指数 Y とその推定値 \hat{Y} の一致度の尺度を示すものであり、I の場合において土壌型だけで地位指数を表現しようとする、その重相関係数は 0.671 で、次に土壌型と有効深度で地位指数を表現しようするとその重相関係数は 0.675 である。このようにみてゆくと、0.9 くらいの重相関係数を期待するには A-B 層構造まで、すなわち少なくとも 40 個ぐらいの要因項目群を使わねばならないといえよう。9 項目、58 個のカテゴリーでの地位指数の表現は重相関係数 0.962 となった。ここで重相関係数 0.962 に達する過程において各項目を逐次とり入れてきた場合の効率の変化はつぎのような関係式で観察できる。すなわち、

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{1 - \rho^2_l}{1 - \rho^2_{l-1}}} \quad (l = 2, 3, \dots, M)$$

これによれば、もし $l-1$ 段階の重相関係数 ρ_{l-1} と l 段階の重相関係数 ρ_l が同じならば、すなわち、新しい項目を追加したにもかかわらず重相関係数 ρ が変化しないならば、そのときの η は 0 になるから、その段階で追加した項目の効果はなかったものと判断される尺度になる。これを要因群偏相関係数と名づけよう。Table 20 の最下欄にこの数値が示されており、要因項目群を逐次とり入れた段階ごとの重相関係数と要因群偏相関係数の関係を Fig. 5 に示してある。これによれば標高、構造、土性、石礫、腐植含量等の項目が重相関を大きくするのに大きく寄与していることがうかがえる。このことをもう少し検討しよう。数量化理論を応用した場合、各要因が外的基準に対する寄与の大きさを測る尺度に 2 種の測度が考えられている。その 1 つは項目スコアの変動の幅、すなわち、レンジ (Range) の大きさが用いられる。レンジは項目群ごとに最大スコアと最小スコアの差である。これは Table 20 にそれぞれ計算されている。この分析では地位指数を各項目に与えられたスコアの和で表わすのであるから、いまある項目 A に着目し、他の項目を固定して考えれば、項目 A によって起こる地位指数の動きは項目 A の最高スコアを取るとき、スコアの和である地位指数は最大となり、最低のスコアをとるとき、地位指数は最小となる。つまり、項目 A によって起こる地位指数の変動の大きさは項目 A のレンジの大きさになる。したがってレンジの大きな項目はそれだけ地位指数に大きな影響を与えることになる。しかし、このレンジは計算のもとになるスコアそのものが全項目に対して合理的に決められたものであるため、ある特定の項目が地位指数

Table 20. 要因群スコア (I の場合)
Score of factors (case I).

要因項目 Item of factors	要因カテゴリー Category of factors	外的基準 Outsider	反応個数 Frequency <i>n_{ij}</i>	<i>X</i> ₁	<i>X</i> ₂	<i>X</i> ₃	<i>X</i> ₄	<i>X</i> ₅	<i>X</i> ₆	<i>X</i> ₇	<i>X</i> ₈	<i>X</i> ₉	レンジ Range	偏相関係数 Partial correlation coefficient.	平均値 Mean	偏差 Deviation	
土壌型 A ₁ 層深度 (<i>X</i> ₁)	Bl(dry) 浅	①	26	3	8.6667	3.1990	3.2797	-1.4375	-9.7929	1.6358	-2.5018	12.8790	8.8922			-4.7437	
	" 中	②	172	13	13.2308	13.3687	8.4889	6.4391	11.1880	12.3132	8.1669	16.2267	13.4004	7.8602	0.673	13.6359	-0.2355
	" 深	③	186	13	14.3077	14.5280	7.7014	7.1647	12.2717	11.8491	8.0608	15.8063	12.9898				-0.6461
	Bl(D) 浅	④	40	3	13.3333	13.0855	8.3516	4.5729	10.9438	10.5968	6.4806	15.2110	12.1872				-1.4487
	" 中	⑤	132	8	16.5000	16.1747	10.2906	3.9073	9.8422	10.8733	6.2513	15.0097	11.9713				-1.6646
	" 中深	⑥	400	22	18.1818	17.8100	11.6913	5.0324	10.0373	11.8319	7.8001	16.1671	13.0385				-0.5974
	" 頗深	⑦	234	11	21.2727	20.9009	16.2277	8.9527	13.7136	13.9695	9.2819	17.0643	14.1360				-0.5001
	Bl(E) 浅	⑧	40	2	20.0000	19.6282	14.6381	8.1216	12.9356	13.8286	9.0697	17.6142	14.5488				-0.9129
	" 中	⑨	92	4	23.0000	22.6282	16.9104	8.8864	16.5474	15.4258	10.1286	19.0079	15.8005				-2.1646
	" 中深	⑩	294	13	22.6154	22.2436	18.2679	10.1986	15.7668	16.6003	11.2852	19.8495	16.7524				-3.1165
有深効度 (<i>X</i> ₂)	浅	①	150	12		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				-3.0909	
	中	②	104	8		-1.0932	0.7956	1.4145	2.2857	2.1604	2.6886	2.2932	3.6815	0.574	3.0909	-0.6795	
	深	③	1362	72		0.3718	2.6525	2.4339	3.1828	4.0604	4.1576	3.6258	3.6815			0.5906	
腐植含量 (<i>X</i> ₃)	上・頗富・下・頗富	①	134	10			0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				-1.6379	
	" "・下・富	②	478	25			1.1974	2.1156	-2.3647	0.5409	0.9551	-0.3943	-0.1648	4.4694	0.685	1.6379	-1.8027
	上・富・下・富	③	82	4			4.6428	4.9287	-0.1640	2.8238	3.4357	1.0561	0.6308				-1.0071
	上・頗富・下・含	④	572	33			4.2214	4.9011	1.1427	3.5464	3.9803	2.3044	2.5696				0.9317
	上・富・下・含	⑤	160	8			7.1325	7.2789	2.9116	4.6337	5.5763	3.7759	4.3046				2.6667
	上・頗富・下・乏	⑥	102	6			8.0245	10.1120	4.1541	5.7480	6.3756	3.8896	4.1573				2.5194
	上・富・下・乏	⑦	88	6			4.7835	5.3736	1.8801	2.0096	2.3436	1.1089	1.3504				-0.2875
B 層土性および石礫 (<i>X</i> ₄)	乾性・残積土・細粒	①	316	25				0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				-2.5742	
	" " 中粒	②	26	2				5.5377	17.1504	11.9770	12.5863	4.7383	5.5229	6.3292	0.728	2.5742	2.9487
	" " 粗粒	③	30	2				-1.5955	6.0724	-0.6147	-0.8608	-0.2155	-0.3046				-2.8788
	適潤・残積土・細粒	④	268	17				4.7479	6.1838	3.2436	3.8324	2.8611	3.0383				0.4641
	" " 中粒	⑤	20	1				7.6050	8.9024	4.7418	4.9996	4.9530	6.0246				3.4504
	" " 匍行土・細粒	⑥	516	25				7.1244	6.7185	3.8069	4.7098	3.5541	3.9122				1.3380
	" " 中粒	⑦	130	6				7.4515	7.1791	3.7672	3.9000	1.9794	2.4977				-0.0865
	" " 粗粒	⑧	16	1				3.6326	3.5957	2.4224	3.3260	2.0338	2.0189				-0.5553
	" " 崩積土・細粒	⑨	158	7				8.9345	7.8940	4.7845	6.3770	4.6469	5.1056				2.5314
	" " 中粒	⑩	116	5				7.8899	7.1005	3.7299	5.2663	2.6284	3.0936				0.5194
	" " 粗粒	⑪	20	1				3.8478	4.2996	0.2564	3.7995	2.1418	2.6946				0.1204
A	上-Cr・下-Cr	①	148	6				0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				2.7811	
	" 下-Bk	②	130	6				-1.1079	-0.0292	-0.1336	-1.9819	-1.8779	9.7304	0.703	-2.7811	0.9032	

Table 21. 内部相関行列 (IIの場合)
Inner correlation matrix (case I).

	土 壤 型 X_1	有効深度 X_2	腐植含量 X_3	土性・石礫 X_4	構 造 X_5	標 高 X_6	方 位 X_7	傾 斜 X_8	母 材 X_9	外的基準 outsider
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.00000	0.39625	-0.40493	0.27858	0.25161	0.24388	0.12775	0.07290	0.04193	0.57387
2	0.39625	1.00000	-0.27009	0.41192	0.02127	0.02231	0.00742	0.22714	-0.03841	0.44523
3	-0.40493	-0.27009	1.00000	-0.28879	0.09941	-0.00371	0.02564	0.00754	-0.14025	0.03545
4	0.27858	0.41192	-0.28879	1.00000	0.05904	0.26908	0.03006	-0.04738	0.11716	0.56878
5	0.25161	0.02127	0.09941	0.05904	1.00000	0.26397	-0.07765	0.19506	0.13424	0.54060
6	0.24388	0.02231	-0.00371	0.26908	0.26397	1.00000	-0.01246	-0.07691	0.25065	0.62706
7	0.12775	0.00742	0.02564	0.03006	-0.07765	-0.01246	1.00000	-0.00062	-0.27126	0.16069
8	0.07290	0.22714	0.00754	-0.04738	0.19506	-0.07691	-0.00062	1.00000	0.02053	0.13589
9	0.04193	-0.03841	-0.14025	0.11716	0.13424	0.25065	-0.27126	0.02053	1.00000	0.15615
10	0.57387	0.44523	0.03545	0.56878	0.54060	0.62706	0.16069	0.13589	0.15615	1.00000

(IIの場合) (Case II)

	土 壤 型 X_1	有効深度 X_2	腐植含量 X_3	石 礫 X_4	構 造 X_5	標 高 X_6	方 位 X_7	傾 斜 X_8	外的基準 outsider
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.00000	0.22497	-0.38991	0.28142	0.33812	0.20305	0.00053	0.03320	0.49309
2	0.22497	1.00000	-0.31864	0.46661	0.10391	0.00915	0.09214	0.23035	0.43440
3	-0.38991	-0.31864	1.00000	-0.26403	-0.02985	-0.00487	0.11553	0.01127	0.01174
4	0.28142	0.46661	-0.26403	1.00000	0.18186	0.28092	-0.02007	-0.07892	0.62687
5	0.33812	0.10391	-0.02985	0.18186	1.00000	0.31092	0.00220	0.27443	0.59525
6	0.20305	0.00915	-0.00487	0.28092	0.31092	1.00000	0.09939	-0.07897	0.62463
7	0.00053	0.09214	0.11553	-0.02007	0.00220	0.09939	1.00000	-0.01588	0.21201
8	0.03320	0.23035	0.01127	-0.07892	0.27443	-0.07897	-0.01588	1.00000	0.14002
9	0.49309	0.43440	0.01174	0.62687	0.59525	0.62463	0.21201	0.14002	1.00000

数量化による地位指数の推定法 (西沢・真下・川端)

Table 22. 実測地位指数と推定した地位指数の対応 (I の場合)
Relation of actual and estimated site index (case I).

No.	Y	\hat{Y}	$Y-\hat{Y}$	No.	Y	\hat{Y}	$Y-\hat{Y}$
1	16.0000	16.0000	0.0000	51	14.0000	13.9925	0.0075
2	12.0000	11.5608	0.4392	52	18.0000	17.4466	0.5534
3	26.0000	25.3334	0.6666	53	14.0000	14.9246	-0.9246
4	24.0000	24.3517	-0.3517	54	10.0000	10.6580	-0.6580
5	26.0000	24.7499	1.2501	55	12.0000	12.8445	-0.8445
6	20.0000	17.9328	2.0672	56	10.0000	12.1590	-2.1590
7	22.0000	22.5533	-0.5533	57	18.0000	16.5678	1.4322
8	26.0000	24.8944	1.1056	58	14.0000	15.2882	-1.2882
9	24.0000	24.3716	-0.3716	59	12.0000	12.0000	0.0000
10	16.0000	16.4729	-0.4729	60	14.0000	13.1328	0.8672
11	12.0000	10.4268	1.5732	61	10.0000	9.9317	0.0683
12	16.0000	18.0941	-2.0941	62	16.0000	17.9412	-1.9412
13	16.0000	15.6204	0.3796	63	20.0000	19.6208	0.3792
14	22.0000	20.7728	1.2272	64	20.0000	18.0362	1.9638
15	28.0000	29.3004	-1.3004	65	22.0000	22.7504	-0.7504
16	22.0000	20.5477	1.4523	66	20.0000	20.0000	0.0000
17	24.0000	22.0587	1.9413	67	18.0000	19.2267	-1.2267
18	20.0000	21.2643	-1.2643	68	16.0000	18.5694	-2.5694
19	14.0000	14.3359	-0.3359	69	24.0000	22.6575	1.3425
20	20.0000	19.2292	0.7708	70	16.0000	17.3895	-1.3895
21	14.0000	15.5678	-1.5678	71	18.0000	17.3207	0.6793
22	24.0000	24.2611	-0.2611	72	12.0000	11.8816	0.1184
23	18.0000	18.2569	-0.2569	73	4.0000	4.0000	0.0000
24	22.0000	20.8111	1.1889	74	12.0000	11.1549	0.8451
25	20.0000	19.8649	0.1351	75	10.0000	10.5274	-0.5274
26	18.0000	20.1325	-2.1325	76	12.0000	11.7743	0.2257
27	14.0000	15.2152	-1.2152	77	14.0000	13.0391	0.9609
28	18.0000	18.1506	-0.1506	78	10.0000	8.8692	1.1308
29	18.0000	18.9115	-0.9115	79	12.0000	11.5456	0.4544
30	20.0000	19.5973	0.4027	80	8.0000	7.8356	0.1644
31	16.0000	14.0372	1.9628	81	6.0000	7.6708	-1.6708
32	14.0000	14.4392	-0.4392	82	28.0000	27.0784	0.9216
33	20.0000	18.8389	1.1611	83	26.0000	25.4067	0.5933
34	16.0000	14.3074	1.6926	84	22.0000	23.6090	-1.6090
35	18.0000	20.7122	-2.7122	85	16.0000	15.5608	0.4392
36	24.0000	19.4631	4.5369	86	20.0000	18.4182	1.5818
37	22.0000	24.3169	-2.3169	87	24.0000	21.9108	-1.9108
38	26.0000	25.1384	0.8616	88	14.0000	14.0000	0.0000
39	16.0000	13.1264	2.8736	89	22.0000	20.0498	1.9502
40	22.0000	24.2849	-2.2849	90	22.0000	23.1039	-1.1039
41	16.0000	15.9850	0.0150	91	20.0000	21.8571	-1.8571
42	24.0000	20.5708	3.4292	92	20.0000	21.6042	-1.6042
43	14.0000	13.4791	0.5209				
44	24.0000	22.7294	1.2706				
45	22.0000	19.2042	2.7958				
46	20.0000	20.0000	0.0000				
47	18.0000	20.0782	-2.0782				
48	10.0000	10.0000	0.0000				
49	6.0000	8.8310	-2.8310				
50	10.0000	12.4619	-2.4619				

$\sigma_{Y-\hat{Y}}=1.44881$
 $Y-\hat{Y}$ の平均=0.0000041
 $\rho_{Y,\hat{Y}}=0.962$

Table 22 (IIの場合)
(Case II)

No.	Y	\hat{Y}	$Y-\hat{Y}$	No.	Y	\hat{Y}	$Y-\hat{Y}$
1	16.0000	16.1500	-0.1500	51	14.0000	13.8533	0.1467
2	12.0000	10.1878	1.8122	52	18.0000	17.4905	0.5095
3	26.0000	25.5009	0.4991	53	14.0000	15.8887	-1.8887
4	24.0000	24.1422	-0.1422	54	10.0000	11.1120	-1.1120
5	26.0000	24.6779	1.3221	55	12.0000	11.9012	0.0988
6	20.0000	18.6549	1.3451	56	10.0000	11.5957	-1.5957
7	22.0000	22.7506	-0.7506	57	18.0000	16.0024	1.9976
8	26.0000	24.1097	1.8903	58	14.0000	15.7240	-1.7240
9	24.0000	24.1870	-0.1870	59	12.0000	10.7542	1.2458
10	16.0000	15.1057	0.8943	60	14.0000	12.0945	1.9055
11	12.0000	11.1011	0.8989	61	10.0000	9.5507	0.4493
12	16.0000	18.5514	-2.5514	62	16.0000	19.5933	-3.5933
13	16.0000	15.6799	0.3201	63	20.0000	19.9832	0.0168
14	22.0000	20.1662	1.8338	64	20.0000	17.7513	2.2487
15	28.0000	28.6729	-0.6729	65	22.0000	23.3124	-1.3124
16	22.0000	20.4850	1.5150	66	20.0000	20.5813	-0.5813
17	24.0000	22.3328	1.6672	67	18.0000	19.2716	-1.2716
18	20.0000	20.9800	-0.9800	68	16.0000	18.6488	-2.6488
19	14.0000	14.8192	-0.8192	69	24.0000	22.4551	1.5449
20	20.0000	19.3363	0.6637	70	16.0000	17.2691	-1.2691
21	14.0000	16.5502	-2.5502	71	18.0000	17.7149	0.2851
22	24.0000	23.4593	0.5407	72	12.0000	11.6310	0.3690
23	18.0000	18.3370	-0.3370	73	4.0000	7.2492	-3.2492
24	22.0000	20.9112	1.0888	74	12.0000	11.2549	0.7451
25	20.0000	20.9922	-0.9922	75	10.0000	10.0014	-0.0014
26	18.0000	19.1460	-1.1460	76	12.0000	12.1726	-0.1726
27	14.0000	15.2483	-1.2483	77	14.0000	13.3330	0.6670
28	18.0000	17.7321	0.2679	78	10.0000	8.8091	1.1909
29	18.0000	18.6248	-0.6248	79	12.0000	12.3333	-0.3333
30	20.0000	19.4498	0.5502	80	8.0000	7.9873	0.0127
31	16.0000	14.1654	1.8346	81	6.0000	7.9731	-1.9731
32	14.0000	13.5506	0.4494	82	28.0000	27.3699	0.6301
33	20.0000	19.9898	0.0102	83	26.0000	25.8955	0.1045
34	16.0000	13.8028	2.1972	84	22.0000	23.8531	-1.8531
35	18.0000	21.0381	-3.0381	85	16.0000	16.0361	-0.0361
36	24.0000	19.5228	4.4772	86	20.0000	18.6051	1.3949
37	22.0000	23.8618	-1.8618	87	20.0000	21.8914	-1.8914
38	26.0000	25.1432	0.8568	88	14.0000	14.8582	-0.8582
39	16.0000	12.5983	3.4017	89	22.0000	19.9855	2.0145
40	22.0000	24.7797	-2.7797	90	22.0000	22.7321	-0.7321
41	16.0000	15.6044	0.3956	91	20.0000	22.2484	-2.2484
42	24.0000	20.4570	3.5430	92	20.0000	21.3813	-1.3813
43	14.0000	14.0530	0.0530				
44	24.0000	22.4930	1.5070				
45	22.0000	19.1821	2.8179				
46	20.0000	17.3380	2.6620				
47	18.0000	19.7196	-1.7196				
48	10.0000	10.1511	-0.1511				
49	6.0000	8.6731	-2.6731				
50	10.0000	11.6834	-1.6834				

$\sigma_{Y-\hat{Y}} = 1.61136$
 $Y-\hat{Y}$ の平均=0.000032
 $\rho_{Y,\hat{Y}} = 0.952$

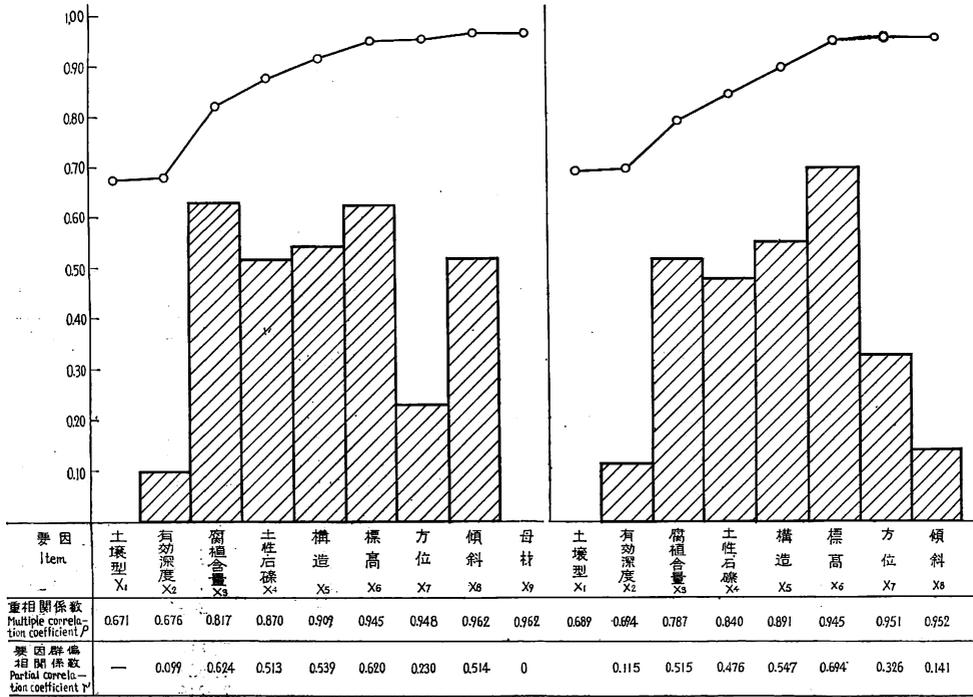


Fig. 5 I の場合
Case I

II の場合
Case II

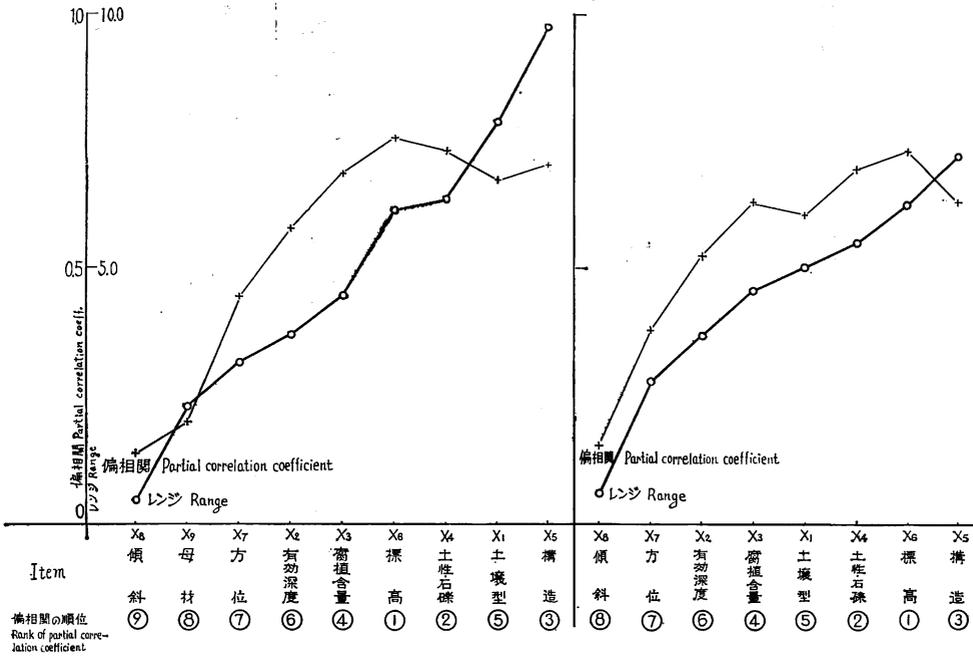


Fig. 6 I の場合
Case I

II の場合
Case II

にいかに関与するかを測るには相対的にしか判断できない点がある。この点を克服するには、他の項目を一定にして当該項目が地位指数とどのくらい深い関係をもっているかを表わすために偏相関係数を使うのが普通である。Table 20 にこれが各項目ごとに(22)式から計算されている。この偏相関係数は思想的にはレンジと全く同じものであり、一般にはレンジの大きさと同じ傾向をもつものである。Fig. 6 にこの偏相関係数とレンジを一諸にグラフ化してある。Fig. 6 にはレンジの大きさに並べた各項目に対して、偏相関係数がどのように変化するかをみたもので、この両者が同じ傾向を示すのが、最も合理的な項目カテゴリーを考慮したことになるのである。しかし、われわれの例ではIの場合において X_4 、 X_1 、 X_5 の各項目で相関係数が小さくなっていくことがみられるが、これはクロス表をみると X_4 や X_5 での反応頻度が非常に偏ったためと考えられる。また、IIの場合でも、 X_5 の偏相関係数が小さくなるのもこの場合のクロス表で X_5 をみると第3番目と第5番目のカテゴリーに大きく偏った頻度が現われているためと考えられる。このように、偏相関係数とレンジが同じ傾向を示さないが、こうした現象はもっと標本を多くすれば解消されるものであることが他の例では実証されている。しからばこの場合、どちらを信用すべきかという相対的な変動しか示さないレンジよりも、偏相関係数で検討するのが一般的である。結局、われわれの分析では、地位指数に対する影響力は標高、土性・石礫、構造、腐植含量、土壌型の順になっている。

以上の考察では標高、土性・石礫、構造等の項目が地位指数に大きく寄与していることが察せられたが、これはそれらの項目が「きく」か「きかない」かを示すだけであるから、きく項目の中でどの要因カテゴリーが地位指数に寄与するかをみよう。それには、各スコアを平均値の位置に移してその動き方をみれば、相対的な動き方がわかる。このようにする理由はスコアの第1番目の値は計算する前に0とおかかっているためにこの値を検討できないからである。さて、この平均値からの偏差を項目ごとに図示したものがIの場合に対しては Fig. 7 から Fig. 15 までである。これによると地位指数に最もきく項目の中でも、標高 1,201~1,400m のカテゴリーが最も大きなスコアをもっている。このことは、1,200~1,400m くらいの標高でのカラマツの地位が大きくなることを暗示させるものである。同じような見方は、Fig. 8 の土性・石礫にもみられる。ここでは少し例外があるが、適潤型が一般に正の点数を与えていることが注目

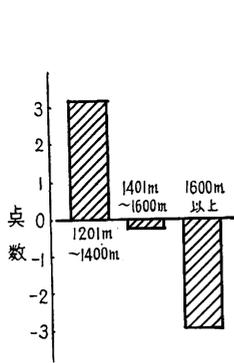


Fig.7 標高の各カテゴリーの点数(偏相関係数0.757)
Score of each category of altitude (Partial corr. coeff. 0.757)

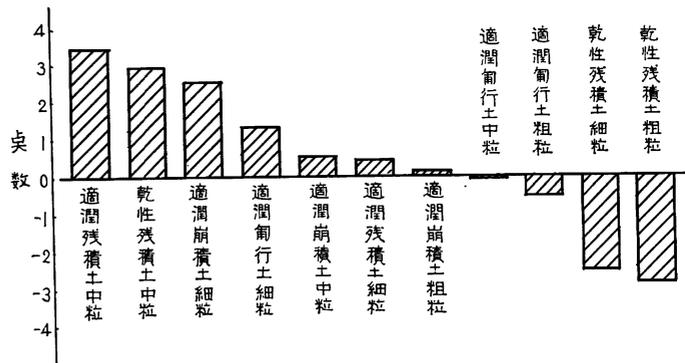


Fig.8 土性・石礫 (偏相関係数 0.728)
Soil texture (Partial corr. coeff. 0.728)

されよう。このことは1—1で考察された結果と一致している。また、Fig.9によれば、上層・下層とも同じ構造をもつものが高いスコアを与えることがうかがえる。同じようなことは Fig.10 から Fig.15 に示した各項目のスコアの変化にもみられ、IIの場合にも同様に考察される。

さて、以上のような観察をするとこの調査対象地において、もっとも地位指数を大きくするにはどのカテゴリーを選ばよいか分かる。ということは、地位指数を大きくするにはどのような条件にすべきであるかの1つの方向が示されたものと解釈できる。われわれの場合においては、

実際現場においてありうるものとしては土壌型：Ble—深、有効深度：深、腐植含量：上一富、下一含；土性・石礫：崩積土中粒；構造：上一Cr、下一Cr；標高1,201~1,400m；方位：S；傾斜：急斜；母材：火山灰 + 安山岩という条件の場合が最高の地位指数 33.54 にもなりうるのである。これらのカテゴリーは、もちろん各項目のうちで最大のスコアをとったもので、地位指数はそれらの和として計算されている。

スコアの分析図をみると、腐植含量や方位等は一般的な傾向というものが見られていないことに注目しなければならない。腐植含量はその偏相関係数が0.68もありながらこのような結果になることは、Table 21 の内部相関行列をみると、そこで外的基準との相関係数が著しく小さいという点である。このことは腐植含量は土壌型や有効深度、および土性・石礫と内部的に相関連しているために、これらの効果が影響してスコアそのものを変動させるためと考察される。この内部相関係数は、与えるべき数量に反応頻度を荷重にして計算されたものであるから、この利用にあたっては十分注意しなければならない。また、方位や傾斜、母材等は偏相関係数も小さく、一般的な傾向をもって地位指数に寄与するものであるという見方が成立していない点に注目しなければならない。

4. 考 察

以上の解析の結果、わずか92点という少ない標本点を58ものカテゴリー要因に反応させた数量化の結果を用いて多分に大胆すぎる結論をしているかもしれないが、このような方法をとれば土壌因子等がどれくらいに地位指数、ひいては林地の生産能力を表現するのに寄与しているのかの一応の方向が打ちだされたものと考えられる。

しかし、ここでいくつかの注意が必要である。第1に、このような解析をするのに、標本点92点は最小限度であるという点である。われわれのこの例では、比較的安定した解が得られたが、社会調査等でこの理論を使う場合は少なくとも500以上の標本をとるのが普通であり、われわれの92点からの解析結果もこの点では、ひとつの例外的なものであるといえるかもしれない。

第2には、地位指数を表現するのにここでとりあげた要因カテゴリーは可能なものすべてでなく、実行上の面から妥当と考えられる要因に限っていることに留意しなければならない。真に地位指数ともっとも密接な関係のある因子が他にもあるかもしれないということは、念頭においておかなければならない。

第3に、われわれがここでとりあげた要因項目に対しての与えられるべき数量も、次の点で変化するか

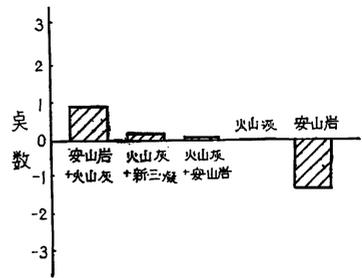


Fig.15 母材 (偏相関係数 0.198)
Parent material.
(Partial corr. coeff. 0.198)

も知れない。それは、数量化の理論のところでも注意しておいたが、外的基準ともっとも関連の高い項目から順にとりいれるべきであるということである。しかし、数量化をしてみてもはじめてその項目が外的基準と関連が高いことがわかるのであって、はじめからその項目が外的基準と高い相関があるかどうかはわからない。そこでもっとも合理的な方法として、あらかじめ全項目を数量化してその相関係数を計算したのちに、相関係数の大きいものから順にとり入れてゆく方法、すなわち、高い相関をもつ項目をはじめに並べて再度、与えるべき数量をきめる方法をとるのがよいであろうことが察せられるが、この点については検証する機会をもつことができなかつた。したがって、われわれが先に説明した解析も、外的基準と関連の高い要因をはじめに並べるといふ点を無視した結果になっていることを認めておく必要がある。実際にこうしたことを行なえば、その項目が「きく」という事実には変化はないであろうが、与えられるべき数量は若干変化するであろうと考えられる。

第4に、地位指数曲線の作製にあたって単木の樹幹解析の過去の資料をもとにしたが、この林木が過去においてもその林分の地位指数を代表するように生育をしたものでなければ、作製した地位指数曲線の妥当性に疑問がもたれよう。すなわち、現在優勢な林木は過去優勢であったかどうかの保証はない。この偏りを修正する方法も、今後の課題となろう。

最後に、集約すれば、数量化の方法によって第1に地位指数と土壌条件と環境因子がどのような関係で結びつけられるか、すなわち、高い地位指数や低い地位指数はどういう条件で求められるかの解明ができるということと、第2に、実際にカラマツが植栽されていない地点に対しても、土壌断面調査や環境調査を行なえば、カラマツを植栽した場合にどのくらいの地位指数が期待できるかということが推察できるということである。

文 献

- 1) 朝日新聞広告部；リーダーシップ・スコアの要因分析，中間報告，朝日新聞東京本社広告部，7，(4)，(1960)
- 2) DAHMS, W. G. : Correction for a possible bias in developing site index curves from selectioned tree data. *Jour. For.*, **61**, 1, pp. 25~27, (1963)
- 3) 林知己夫：数量化と予測に関する根本概念，統計数理研究所彙報，**7**，1，(1959)
- 4) 林知己夫・植松俊夫・高倉節子：市場調査のための統計的数量化の理論と実際，統数研，(1963)
- 5) 小林正吾：数量化による地位予測法，森林立地，**IV**，2，pp. 21~26，(1963)
- 6) 村山孝喜：マス・コミ接触の実態と予測，朝日新聞社広告部，(1961)
- 7) 森田優三：経済変動の統計分析法，岩波全書，(1962)
- 8) 西沢正久・川端幸蔵：カラマツ造林地の実態調査報告(4)，林試，(1964)

Estimation Method of Site Index by Quantification.

Masahisa NISHIZAWA, Yoshihisa MASHIMO and Kôzo KAWABATA

(Résumé)

We have studied an estimated or predicted method of site index from soil conditions and environment factors by means of the quantification in the multi-variate analysis. Numerical example is Larix artificial forest of 600 hectare in Ueda working unit, Ueda District Forestry Office of Nagano Regional Forestry Office. (Table 1)

Outlines of our research are as follows :

1. We considered that the efficient plot size, which is used for soil survey related to site index or various stand factors, is the one by point sampling. The reason is that even if a large tree is standing far away from a soil survey point, soil conditions of this point have a relation with the growth of this tree ; on the other hand, a small one has an inverse relation. By point sampling, we can enumerate large trees at long distances and small ones at short distances from a sampling point. Point sampling has another advantage in that if we measure d. b. h. and tree heights of counted trees, we can get not only basal area per hectare but also tree numbers per hectare, mean d. b. h, mean height and volume per hectare. Now, in one sampling point assume that basal area factor is 4, counted tree numbers is n and d. b. h., basal area, tree height, tree number per hectare of a counted tree are D_t , g_t ($=\frac{\pi}{4}D_t^2$), H_t , and N_t respectively.

(a) basal area per ha $B=4n, (m^2/ha)$

(b) tree numbers per ha $N = \sum_{t=1}^n \frac{4}{g_t} = \sum_{t=1}^n N_t$

(c) mean d. b. h. $\bar{D} = \frac{\sum_{t=1}^n N_t D_t}{N}, (cm)$

(d) mean height $\bar{H} = \frac{\sum_{t=1}^n N_t H_t}{N}, (m)$

(e) volume per ha $V = 4 \sum_{t=1}^n H_t F_t, (m^3/ha)$

The results estimated by this method of 92 sampling points of Larix stand are shown in Table 2.

2. Site index was shown by tree heights of 2m intervals at 40 years of age. Larix stand was divided into 2 blocks, then site index curves were prepared in each block. Site index curves were prepared by the data of stem analysis of 26 sample trees in block A and 16 in block B.

The construction methods of site index curve was as follows :

(a) Calculation of guide curve

We used modified exponential curve method, a kind of logistic curve, as a guide curve.

$$\hat{Y}_t = K - ab^t$$

where \hat{Y}_t : tree height at t age class

t : age class transformed by numerical values 0, 1, 2.....

K, a, b : constant

Calculated guide curves of each block were

Block A : $\hat{Y}_t = 33.5 - 31.997 (0.899241)^t$

Block B : $\hat{Y}_t = 20.7 - 19.396 (0.872645)^t$

Actual tree height and calculated tree height from this curve at each age class in block A are shown in Table 7. It is clear that the suitability is good.

(b) Calculation of adjusted σ_t .

Next we calculated standard error of estimates of each age class from the following formula.

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_t} (Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n_t}}$$

Where n_t is sample tree numbers at t age class.

A smooth curve was drawn on the graph of σ_t (ordinate axis) and t (horizontal axis), (Fig. 2).

Estimated value of σ_t is called adjusted σ_t ($=\hat{\sigma}_t$). These values in Block A are shown in Table 8.

(c) Calculation of site index curve.

We calculated the tree height (y_t) at t age class of site index Y from the next equation.

$$y_t = \hat{Y}_t + R_Y \hat{\sigma}_t$$

where

$$R_Y = \frac{Y - \hat{Y}_{40}}{\hat{\sigma}_{40}}$$

\hat{Y}_t : estimated tree height from guide curve at t age class

\hat{Y}_{40} : " " " at 40 years of age

$\hat{\sigma}_t$: adjusted at t age class

$\hat{\sigma}_{40}$: " at 40 years of age

Site index curves calculated from this equation are shown in Fig. 3 (Block A) and Fig. 4 (Block B).

Site index at each sampling point was determined by these site index curves, and the relation between mean height of dominant tree and age class in each sampling point.

3. The next items and categories of soil conditions and environment factors were surveyed in each sampling point.

(1) Outsider Y = site index

(2) Type of soil — Thickness of A_1 horizon (X_1)

Subtypes of soil :

Thickness Subtype	Very thin	Thin	Thick	Very thick
B/d	~ 5 cm ①	6 ~ 10 cm ②	11 ~ 15 cm ③	
B/b	~ 5 cm ④	6 ~ 10 cm ⑤	11 ~ 15 cm ⑥	16 cm ~ ⑦
B/e	~ 10 cm ⑧	11 ~ 15 cm ⑨	16 ~ cm ⑩	

B/d) : weakly dry black Ando-soil

B/b : moderate moist black Ando-soil

B/e : slightly wet black Ando-soil

(3) Depth to the bedrock or hard substratum (X_2)

	Very shallow	Shallow	Deep
Depth	~ 30 cm	31 ~ 50 cm	51 cm ~
Category	①	②	③

(4) Content of humus (X_3)

Upper soil (10 cm-depth)	Very high	High
Lower soil (30 cm-depth)		
Very high	①	
High	②	③
Medium	④	⑤
Low	⑥	⑦

(5) Soil texture (X_4)

		Fine	Medium	Coarse
Dry soil group	Residual	①	②	③
Moderate moist Soil group	Residual	④	⑤	
	Creep	⑥	⑦	⑧
	Colluvial	⑨	⑩	⑪

(6) Soil structure (X_5)

Upper soil (10 cm-depth)	Cr.				Gr.				
Lower soil (30 cm-depth)	Cr	Bk	Sl	Ms	Nu	Gr	Bk	Sl	Ms
Category	①	②	③	④	⑤	⑥		⑦	⑧

Structure : — Cr : Crumb Gr : Granular Bk : Blocky
Sl : Structureless Ms : Massive

(7) Altitude (X_6)

Above the sea level	1201 ~ 1400 m	1401 ~ 1600 m	1601 m ~
Category	①	②	③

(8) Aspect (X_7)

Direction	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Category	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧

(9) Inclination (X_8)

Degree of the slope	Flat ~ 8°	Gentle slope 9 ~ 22°	Slope 23 ~ 35°	Steep slope 36° ~
Category	①	②	③	／

(10) Parent material (X_9)

Parent material	IR	As	As + IR	IR + As	As + Ta
Category	①	②	③	④	⑤

Parent material : —
 IR : Igneous rock
 As : Volcanic ash
 Ta : Tuffaceous shale

The results of this survey are shown in Table 17.

The cross table between each item and category are shown in Table 19. There are two cases. One includes item (10) and the other does not include item (10) and some items grouped (case II).

Next, we shall explain the theory of quantification by which we can estimate or predict site index from the sum of estimated quantities of each item and category.

4. At first we may consider the next model.

Item	1	2	j	M
Variable	X_1	X_2	X_j	X_M
Category	$C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1r_1}$	$C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2r_2}$	$C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jr_j}$	$C_{M1}, C_{M2}, \dots, C_{Mr_M}$

Where X_i is a quantitative or qualitative variable.

Table shows variable X_j is the one of category $C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jr_j}$.

$$(j=1, 2, \dots, M).$$

Now, we may assume that the following quantities are given for each category.

category	$C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1r_1}$	$C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jr_j}$	$C_{M1}, C_{M2}, \dots, C_{Mr_M}$
quantity	$t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1r_1}$	$t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{jr_j}$	$t_{M1}, t_{M2}, \dots, t_{Mr_M}$

When we estimate site index (called outsider) by the next linear type,

$$\hat{Y} = X_1 + X_2 + \dots + X_M$$

we must determine these quantities so as to minimize the error caused in this case. In other words, we must determine quantities $\{t_{jk}^*\}$ so as to $E\{(Y - \hat{Y})^2\} = \min$. This is to say we must determine these quantities so as to maximize the correlation coefficient between Y and \hat{Y} ($=\rho$).

The estimated site index α_i in each sampling point is the sum of the determined quantities t_{jk} .

Now, if t_{jt} is a determined quantity for the j th item of i th sampling point,

$$\alpha_i = t_{i1} + t_{i2} + \dots + t_{iM} \quad (i=1, 2, \dots, n, n \text{ is number of sampling point}).$$

Then the correlation coefficient between α_i and Y_i is given by

$$\rho = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(\alpha_i - \bar{\alpha}) / \sigma_Y \sigma_\alpha$$

where

$$\sigma^2_Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$\sigma^2_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2 \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

As ρ is independent of the position of origin, we put $\bar{\alpha}=0, \bar{Y}=0$. Then we can get

$$\rho = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \alpha_i / \sigma_Y \sigma_\alpha \quad \dots\dots\dots(1)$$

Now, we must determine the quantity of l th item and m th category (t_{lm}) so as to maximize formula (1) under the condition $\bar{\alpha}=\bar{Y}$.

For this purpose, we put

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_{lm}} = 0$$

Then we get the next simultaneous equations,

$$t_{lm} n_{lm} + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{r_j} t_{jk} f_{lm}(j, k) = \sum_{i=1}^n Y_i \delta_i(lm) \quad \dots\dots\dots(2)$$

where

$\sum_1 \sum_2$ is the sum except in the case of both $j=l$ and $k=m$.

We see necessary next some definition in order to understand the equation (2).

① Definition of $\delta_i(j, k)$

$$\begin{cases} \delta_i(j, k) = 1 : \text{when variable } X_i \text{ of } i\text{th sampling point was observed as } i\text{th item and} \\ \quad \quad \quad k\text{th category} \\ \delta_i(j, k) = 0 : \text{other cases} \end{cases}$$

then

$$\sum_{k=1}^{r_j} \delta_i(j, k) = 1, (j=1, 2, \dots, M, i=1, 2, \dots, n)$$

and

$$\begin{aligned} \delta_i(j, k) \delta_i(j, k') &= 0 \quad (k \neq k') \\ \delta_i(j, k) \delta_i(j, k) &= 1 \quad (k = k') \end{aligned}$$

This means that only one category of each item is observed in one sampling point.

② If we denote observed numbers of each item and category

$$\begin{aligned} n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1r_1}; n_{21}, n_{22}, \dots, n_{2r_2}; \dots; n_{M1}, n_{M2}, \dots, n_{Mr_M} \\ n = \sum_{k=1}^{r_j} n_{jk} \quad (j=1, 2, \dots, M) \end{aligned}$$

The relation of n_{jk} and $\delta_i(j, k)$ are

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \delta_i(j, k) &= n_{jk} \quad \left(\begin{matrix} j=1, 2, \dots, M \\ k=1, 2, \dots, r_j \end{matrix} \right) \\ \sum_{k=1}^{r_j} \sum_{i=1}^n \delta_i(j, k) &= n \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

③ Definition of $f_{lm}(j, k)$

$$\sum_{i=1}^n \delta_i(lm) \delta_i(j, k) = f_{lm}(j, k)$$

This is the observed numbers of j th item and k th category in the observed number of l th item and m th category.

The relation of n_{jk} and $f_{lm}(j, k)$ are

$$\sum_{m=1}^{r_l} f_{lm}(j, k) = n_{jk} \quad (l=j=1, 2, \dots, M)$$

$$\sum_{m=1}^{r_l} \sum_{k=1}^{r_j} f_{lm}(j, k) = n \quad (l=j=1, 2, \dots, M)$$

$$f_{lm}(j, k) = 0 \quad (l=j, k \neq m)$$

Simultaneous equations (2) have unknown variable t_{lm} . The solution of these equations are $\{t_{jk}^*\}$. When we solve these equations, some attention to the following is necessary.

We have a condition $\bar{x} = \bar{Y}$, so total condition is $(M-1)$. Then if we put $t_{j1} = 0$ ($j=2, 3, \dots, M$), total condition is M and $(M-1)$ ranks of coefficient matrix are dropped from total numbers of category, so we have simultaneous equations with this coefficient matrix.

The solutions of equations (2) are $\{t_{jk}^*\}$, and the sum of these quantities is site index α_i or \hat{Y}_i . Then we can get the correlation coefficient between Y_i and \hat{Y}_i from

$$\rho = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \hat{Y}_i - \bar{Y} \bar{\hat{Y}} \right) / \sigma_Y \sigma_{\hat{Y}}$$

The degree of suitability is better in the next cases.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum (Y_i - \hat{Y}_i) \quad \text{is nearer to zero.}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2} \quad \text{is very small.}$$

The multiple correlation coefficient is given by

$$\rho_{Y:1, 2, 3, \dots, M} = \sqrt{1 - \frac{|R|}{R_{YY}}}$$

The partial correlation coefficient is given by

$$\rho_{Y,j:1, 2, \dots, M} = \frac{R_{Yj}}{\sqrt{R_{YY} R_{jj}}}$$

The multiple correlation coefficient shows the degree of suitability and the partial correlation coefficient is the simple correlation coefficient between site index and one item when other item are fixed.

5. We adapted this theory of quantification to our data of Table 19 and we got quantities $\{t_{jk}^*\}$ of each category of soil condition and environment factors. We used the electronic computer HITAC 3010 in order to get solution of the simultaneous equations (2). The results are shown in Table 20, 21 and 22. The multiple correlation coefficient $\rho_{Y:1, 2, 3, \dots, M} = 0.96$ is very high, so we shall be able to estimate or predict the site index from the sum of quantities of soil conditions and environment factors.